

**Aurélien Barrau
Julien Grain**

Relativité générale

Cours et exercices corrigés

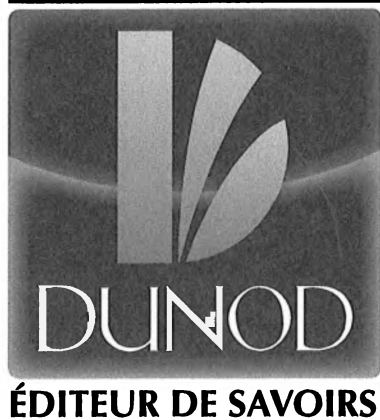
Licence 3
Master
Écoles
d'ingénieurs

DUNOD



Relativité générale

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



Aurélien Barrau
Julien Grain

Relativité générale

Cours
et exercices corrigés

DUNOD

Illustration de couverture : Bocos Benedict – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
	

© Dunod, Paris, 2011
ISBN 978-2-10-056316-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	IX
Chapitre 1. Les idées de la relativité générale	1
1.1 Vers le principe d'équivalence	1
1.2 Conséquences du point de vue relativiste	3
1.3 Retour sur le principe d'équivalence	4
Exercices	7
Corrigés	8
Chapitre 2. Relativité restreinte	11
2.1 Construction de la transformation de Lorentz	11
2.1.1 Symétries	13
2.1.2 Structure de groupe	14
2.2 Quelques conséquences fondamentales	18
2.2.1 Tenseurs	18
2.2.2 Retour sur les symétries	20
2.2.3 Espace-temps	22
2.2.4 $E = mc^2$	23
2.2.5 Les équations de Maxwell	24
Exercices	27
Corrigés	30
Chapitre 3. Qu'est-ce que la courbure ?	35
3.1 Principe d'équivalence : un peu plus précisément	35
3.2 Courbure spatiale	37
3.2.1 Propriétés intuitives, géodésiques	37
3.2.2 Mesurer la courbure	41
3.3 Courbure spatio-temporelle	42
Exercices	44
Corrigés	46
Chapitre 4. Premier aspect de la relativité générale : la physique en espace courbe	51
4.1 Éléments d'analyse tensorielle	51
4.1.1 Le minimum vital	51
4.1.2 Vecteurs et covecteurs	54
4.1.3 Quelques règles et définitions	56
4.2 Première approche de la théorie d'Einstein	58
4.2.1 Principe de covariance généralisé	58
4.2.2 Dérivation covariante	60
4.2.3 Calcul des coefficients de connexion : théorème fondamental	62
4.3 Covariance généralisée et équation géodésique	64

Relativité générale

4.3.1	Covariance générale	64
4.3.2	Équation géodésique : première dérivation	65
4.3.3	Équation géodésique : seconde dérivation	66
	Exercices	68
	Corrigés	70

**Chapitre 5. Second aspect de la relativité générale :
comment la masse crée la courbure** **75**

5.1	Tenseur de courbure de Riemann	75
5.1.1	Définition	75
5.1.2	Quelques remarques	78
5.2	Tenseur énergie-impulsion	80
5.2.1	Définition	80
5.2.2	Conservations	81
5.3	Équations d'Einstein	83
5.4	Ondes gravitationnelles	86
5.4.1	Équations d'Einstein linéarisées	86
5.4.2	Invariance de jauge et choix de jauge	87
5.4.3	Solution en onde plane	89
5.5	Qu'est exactement la relativité générale?	91
5.5.1	Le cœur de la théorie	91
5.5.2	Un mot sur le graviton	93
5.5.3	Action du champ gravitationnel	93
5.5.4	Extensions de la relativité générale	94
5.5.5	Constante cosmologique	96
	Exercices	98
	Corrigés	101

Chapitre 6. Cosmologie **107**

6.1	Métrique FLRW	107
6.1.1	Les bases de la cosmologie	107
6.1.2	Forme de la métrique	109
6.2	Équations de Friedmann-Lemaître	113
6.2.1	Tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait	113
6.2.2	Remarque sur les métriques diagonales	114
6.2.3	Tenseur énergie-impulsion de l'Univers	115
6.2.4	Tenseur d'Einstein de l'Univers	115
6.2.5	Équations de Friedmann-Lemaître	117
6.3	Dynamique cosmologique	121
6.3.1	Définitions	121
6.3.2	Quelques solutions des équations de Friedmann	122
6.4	Des paradoxes dans le paradigme?	126
	Exercices	130
	Corrigés	134

Chapitre 7. Trous noirs	139
7.1 Métrique de Schwarzschild	139
7.1.1 Construction de la métrique de Schwarzschild	139
7.1.2 Remarque sur $r = 2GM$	142
7.1.3 Quelques propriétés élémentaires	144
7.1.4 Sur les coordonnées	146
7.2 Physique au voisinage d'un trou noir	147
7.2.1 Énergie en géométrie de Schwarzschild	147
7.2.2 Vitesse à l'horizon du trou noir	149
7.2.3 Orbite autour d'un trou noir	150
7.3 À l'intérieur du trou noir	155
7.3.1 L'horizon est-il singulier?	155
7.3.2 L'impossible retour	157
7.3.3 Dans le trou noir	158
7.4 Un peu plus loin	158
7.4.1 Effet Hawking	158
7.4.2 Un effet similaire en cosmologie	162
7.4.3 Structure causale	163
Exercices	164
Corrigés	168
Chapitre 8. Vers la gravitation quantique : la voie des cordes	177
8.1 Idées fondamentales	177
8.2 Une première ébauche d'introduction	179
8.3 Histoire, incertitudes et conséquences	184
Exercices	185
Corrigés	188
Chapitre 9. Vers la gravitation quantique : la voie des boucles	191
9.1 Idées fondamentales	191
9.2 Un peu de formalisme	194
9.3 Cosmologie quantique à boucles	199
Exercices	202
Corrigés	205
Bibliographie	209
Index	210

INTRODUCTION

La relativité générale est bien plus qu'une théorie du champ gravitationnel. C'est une déconstruction profonde de notre manière de concevoir l'espace-temps et, au-delà, la physique elle-même. La théorie d'Einstein, sans doute l'une des plus élégantes et des plus subversives propositions jamais élaborées par l'esprit humain, dessine un monde strictement relativiste et relationnel qui infléchit profondément nos rapports au(x) réel(s). L'espace-temps n'est plus un cadre, un fond, une trame : il est un phénomène, lui aussi régi par des équations d'évolution et dépendant de la présence de corps et de leur nature. Sans doute faudrait-il plutôt considérer que l'espace-temps n'existe pas et que nous habitons sur le champ de gravité qui est lui-même en interaction avec tous les autres champs physiques.

Ce livre est une approche hybride de ces questions : moderne dans les thématiques choisies mais traditionnel dans le formalisme utilisé. Nous avons systématiquement choisi le chemin qui nous semblait le plus simple et le plus intuitif, qu'il soit novateur ou très classique. Il s'agit d'une introduction rudimentaire dont l'objectif est de proposer une vision globale des concepts et idées de la relativité générale. Un portrait à « gros trait » qui tente de ne pas trahir l'élégance de la silhouette. Le lecteur plus intéressé, souhaitant entrer dans les subtilités techniques ou les méthodes modernes, est naturellement invité à creuser ce qui l'interpelle par le recours à des ouvrages plus spécialisés. C'est pourquoi nous n'usons ni de géométrie différentielle ni de formes linéaires. Les mathématiques convoquées sont extrêmement simples et les tenseurs sont introduits de manière « historique » afin de ne pas rebuter par excès d'abstraction. Nous avons résisté à la vision « purement géométrique » qui nous semblait trop complexe pour une première découverte de la théorie. Sur chaque aspect des problématiques abordées, des éléments de démonstration sont néanmoins donnés afin que le lecteur comprenne, ce qui est essentiel, l'origine des assertions. Nous insistons systématiquement sur la méthode et évoquons toujours en détail ce qu'il aurait fallu faire quand le calcul n'est pas explicitement mené. Nous n'entrons pas, néanmoins, dans les détails calculatoires qui peuvent rapidement devenir délicats. Nous en restons à l'esquisse. De façon originale, nous ne cachons jamais les difficultés, les controverses, les ambiguïtés, les interprétations éventuellement contradictoires. La pensée scientifique est une attitude de doute et de remise en cause. Nous avons souhaité insister sur les problèmes autant que sur les évidences.

Le livre présente d'emblée les idées de la relativité générale. Bien que la relativité restreinte soit supposée en partie connue, nous en rappelons néanmoins les fondements afin d'insister sur le rôle fondamental qui y est joué par les symétries. Le modèle einsteinien est alors décrit en détail afin de répondre successivement aux deux questions suivantes : comment la physique s'écrit-elle en espace courbe ? Comment la masse crée-t-elle la courbure ? La théorie ainsi établie est ensuite appliquée à deux

systèmes particuliers et fascinants : l'univers dans son ensemble et les trous noirs. Nous concluons en ouvrant sur les pistes de recherche contemporaines en gravitation quantique.

Nous avons tenté de nous placer dans l'« entre deux » : ce livre n'est ni une monographie de référence visant à élucider tous les aspects abordés jusque dans les démonstrations, ni un simple fascicule de vulgarisation. C'est une approche intermédiaire où de nombreux sujets sont discutés, y compris ceux qui se situent au cœur de la recherche contemporaine, sans, bien évidemment, mener explicitement toutes les dérivations ou recourir au formalisme le plus rigoureux.

Chaque chapitre est ponctué de quelques exercices. Ils doivent être considérés comme un second niveau de lecture. On peut parcourir tout l'ouvrage sans les résoudre. Mais ils permettront d'approfondir nombre de notions introduites dans le cours à proprement parler. Il est essentiel, au-delà des aspects techniques, que le lecteur prenne le temps d'interpréter ses résultats. Nous avons choisi, à dessein, de ne pas toujours le guider sur cette voie.

Nous espérons que cet ouvrage introductif conduira ceux qui n'en saisiront à découvrir plus en profondeur la relativité générale. Nous souhaitons surtout qu'il contribuera à développer un rapport à la science tout à la fois innervé d'enchantement et irrigué d'inévidance. Qu'il permettra, par une présentation simple et directe de la plus belle théorie de la physique, de s'affranchir d'un certain « normativisme » universitaire. Notre vœu le plus cher serait également qu'il suscite chez le lecteur quelques désirs de réflexions philosophiques et, qu'en contrepoint de celle d'Einstein, la découverte de Derrida, Deleuze, Nancy ou Foucault s'invite dans la partie. Ces immenses philosophes du complexe, de l'intriqué et de l'imbriqué, de l'abîme et du non-dit, de la faille et de l'intertextuel, ne sont, contrairement à ce qui a été parfois supposé, pas du tout des ennemis des sciences. Ce sont, en revanche, des amis de l'intelligence. Sous toutes ses formes. Que la physique soit une magnifique construction ne signifie certainement pas que tous les modes de pensée doivent s'y réduire. C'est, en tout cas, dans cet esprit que nous avons rédigé cet opuscule.

Ce livre doit beaucoup aux textes et ouvrages : « *General Relativity* » de Kenyon, « *Gravitation* » de Misner, Thorne et Wheeler, « *Relativité* » de Damour, « *Gravitation and cosmology* » de Weinberg, « *Quantum gravity* » de Rovelli, « *Loop Quantum Cosmology* » de Bojowald, « *Introduction to string theory* » de Mohaupt, « *A first course in string theory* » de Zwiebach, « *Exploring black holes* » de Taylor et Wheeler. Qu'ils soient ici remerciés, en particulier Carlo Rovelli dont la démarche singulièrement érudite, modeste, créative et généreuse demeure un exemple et devrait devenir un modèle.

Aurélien Barrau et Julien Grain
Février 2011, Institute for Advanced Study, Princeton

LES IDÉES DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1

INTRODUCTION

Ce chapitre entend donner un premier aperçu rapide des idées fondatrices de la relativité générale. Il s'agit, de façon très qualitative, de comprendre rapidement d'où vient le célèbre adage suivant lequel, dans la théorie d'Einstein, « l'espace-temps est courbe » et cette courbure est la gravitation. Il s'adresse au lecteur déjà familier des rudiments de relativité restreinte.

1.1 VERS LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

La caractéristique la plus frappante du champ gravitationnel est sans doute la suivante : tous les corps, quelles que soient leurs masses et leurs compositions, s'y meuvent de la même manière pour les mêmes conditions initiales. Autrement dit, quand on écrit la loi fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ pour la force gravitationnelle $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, la masse se simplifie et ne subsiste pas dans l'équation du mouvement : $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Ce résultat demeure évidemment valide même si l'on ne considère pas un champ gravitationnel uniforme. Dans le champ de gravité (et seulement dans le champ de gravité), les trajectoires ne dépendent pas des particularités des corps.

Cette propriété fondamentale du champ gravitationnel permet d'établir un parallèle très important entre le mouvement d'un corps dans le champ de gravité et celui d'un corps libre (non soumis à la force gravitationnelle), mais considéré dans un référentiel accéléré. Si, en effet, on rapporte le mouvement de corps – préparés suivant les mêmes conditions initiales dans un référentiel d'inertie – à un référentiel accéléré, ils s'y déplaceront tous de la même façon. Exactement comme dans un champ de gravitation. C'est le cœur du principe d'équivalence : les caractéristiques du mouvement dans un champ de gravitation sont les mêmes qu'en l'absence de champ mais dans un référentiel accéléré et donc non inertiel. De façon remarquable, nous avons ici déjà fait l'essentiel du chemin menant à la relativité générale !

Il est nécessaire de considérer un référentiel *accéléré* car les trajectoires dans un champ de gravitation ne sont, vues d'un référentiel d'inertie, bien évidemment pas uniformes. Le déplacement du référentiel qui permet de générer des trajectoires équivalentes à celles du champ gravitationnel est donc bel et bien accéléré. Considérons, par exemple, la chute d'objets de masses et de compositions différentes, mais soumis

aux mêmes conditions initiales, dans une petite pièce où le champ de gravité peut être considéré comme identique en tous points. Ils suivent une trajectoire uniformément accélérée (avec une accélération g) vers le sol. Si maintenant on considère exactement la même situation, à ce détail près que le champ gravitationnel serait absent mais que la pièce et son référentiel associé seraient accélérés vers le haut (avec, en valeur absolue, la même accélération g), on se trouve bien face à des observations strictement identiques. Les deux circonstances ne peuvent être distinguées. Un référentiel uniformément accéléré est équivalent à un champ gravitationnel homogène. Si l'accélération du référentiel n'est pas uniforme, elle peut rendre compte d'un champ non constant temporellement.

Il est important de bien comprendre dès maintenant que cette démarche ne fonctionne qu'avec la gravitation. Imaginons qu'une charge électrique se déplace entre le plafond chargé positivement et le plancher chargé négativement. On peut évidemment, pour cette trajectoire particulière, considérer que tout se passe comme s'il n'y avait pas de champ électromagnétique mais plutôt un certain déplacement du référentiel. C'est toujours possible et cela semble analogue au raisonnement précédent. Mais, dans ce cas, cette démarche n'aurait aucun sens : une autre charge électrique aurait un autre mouvement (même à conditions initiales identiques) et il n'y a donc pas une accélération *unique* du référentiel qui permette de rendre compte de toutes les trajectoires. L'équation du mouvement est $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$ et les caractéristiques (charge q et masse m) de la charge ne se simplifient pas. C'est le caractère universel de la gravitation, le fait qu'elle se couple identiquement avec tous les corps, quelles que soient leurs caractéristiques intrinsèques, qui rend l'équivalence avec un mouvement accéléré du référentiel fructueuse.

Il faut insister sur un point fondamental dont les conséquences sont centrales en relativité générale : les champs auxquels sont équivalents les référentiels non inertiels ne sont pas rigoureusement identiques aux champs gravitationnels usuels dans les référentiels d'inertie. Les champs « réels » (cette expression ne sous-tend ici aucun « réalisme » philosophique supposant que la physique donnerait accès au « réel » en soi, bien au contraire) sont toujours inhomogènes et l'équivalence n'est donc possible que *localement*. L'élimination du champ ne peut se faire que dans une région de l'espace suffisamment petite pour que le champ soit considéré comme constant à la précision requise.

Fondamentalement, la relativité générale consiste à prendre au sérieux cette analogie. Bien qu'il nous soit très familier (mais la familiarité est parfois le signe d'une aveuglante proximité) le concept de « force à distance » est extrêmement complexe et conceptuellement coûteux. Il tire justement sa légitimité de sa capacité à rendre compte aisément d'effets qui dépendent des caractéristiques des corps. Si, dans le cadre gravitationnel, l'universalité du couplage permettait de s'affranchir du

recours à des « forces » et autorisait un retour à une vision plus « géométrique » – une physique platonicienne en quelque sorte – il s'agirait sans aucun doute d'une simplification considérable de la théorie. Tel est l'enjeu de la relativité générale. Quelles que soient les difficultés calculatoires qui peuvent survenir, il est raisonnable de considérer que la théorie d'Einstein est, conceptuellement, beaucoup plus simple que la gravitation newtonienne.

1.2 CONSÉQUENCES DU POINT DE VUE RELATIVISTE

En explorant les conséquences du principe d'équivalence dans le cadre de la relativité restreinte, il est aisé de comprendre comment ce que Newton voyait comme un champ gravitationnel va devenir, chez Einstein, un effet géométrique. La quantité fondamentale en relativité restreinte est effectivement l'intervalle¹ $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Son invariance par changement de référentiel d'inertie est le cœur de la théorie. C'est ce qui traduit mathématiquement toute la structure de la relativité restreinte et permet de voir émerger immédiatement les effets de dilatation du temps ou contraction des longueurs. Suivant une approche historique, on pourrait aisément montrer que l'intervalle est invariant en utilisant les symétries fondamentales de l'espace-temps. Ou, suivant une approche plus moderne, construire la transformation de Lorentz (ce qui sera fait au prochain chapitre) et vérifier qu'elle laisse effectivement l'intervalle invariant. Quelle que soit l'approche, le fait que l'intervalle ne change pas lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie à un autre est le point nodal de la relativité restreinte.

Or, précisément, nous venons d'établir que les champs gravitationnels sont équivalents à des référentiels non inertiels. Et si l'on passe à un référentiel non inertiel, l'intervalle n'a plus aucune raison de garder la même forme ! En général, l'intervalle ne s'écrit plus comme une somme des carrés des différentielles des coordonnées. Puisque l'intervalle encode la géométrie (il est en quelque sorte la généralisation du théorème de Pythagore à un espace quadri-dimensionnel pseudo-euclidien²), la modification de sa forme signifie une *modification géométrique*. Le cadre conceptuel de la relativité générale est ici planté.

Si l'on considère, par exemple, la transformation des coordonnées lors du passage d'un système inertiel à un système en rotation à vitesse angulaire constante, il est très simple de montrer que l'expression de ds^2 dans le second système ne *peut pas*

1. Nous utilisons ici, comme dans l'essentiel du livre (sauf quand il est utile de procéder autrement), les unités naturelles. C'est-à-dire que la vitesse de la lumière est prise à $c = 1$. Quelle autre unité de vitesse serait en effet plus naturelle que celle de la lumière ?

2. « Pseudo »-euclidien signifie simplement qu'il y a des signes « - » devant les termes dx^2 , dy^2 et dz^2 . À ce détail près la structure est bien celle de l'espace euclidien usuel à 4 dimensions (3 dimensions d'espace et 1 dimension de temps).

se réduire à une somme des différentielles des quatre coordonnées. Dans un système non inertiel, il faut donc écrire l'intervalle sous une forme plus générale :

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

où $g_{\mu\nu}$ se nomme la *métrique* de l'espace temps. Pour des raisons dimensionnelles, il est bien clair que cette forme quadratique est l'écriture la plus générale possible (pour retrouver l'intervalle de la relativité restreinte dans un référentiel d'inertie, il ne peut pas y avoir de termes du type dx^3 ou $dt dy^2$ par exemple). Les quantités $g_{\mu\nu}$ (qu'on peut à ce stade voir comme des coefficients) déterminent toutes les propriétés géométriques. On comprend dès lors très simplement l'importance cruciale de cette métrique : son caractère non trivial (*i.e.* différent de la valeur particulière, notée $\eta_{\mu\nu}$, qu'elle acquiert dans un espace pseudo-euclidien) est engendré par le passage à un référentiel non inertiel, lui même imposé pour rendre compte de la gravitation dans l'optique du principe d'équivalence. Cela témoigne de l'apparition d'une géométrie elle aussi non triviale où la somme des angles d'un triangle ne vaut plus 180 degrés et où la circonférence d'un cercle ne vaut plus 2π fois son rayon.

Il apparaît ainsi non seulement que la géométrie n'est plus aussi simple que ce dont nous étions coutumiers mais surtout qu'elle devient fondamentalement dynamique. Les corps se déplacent et induisent donc une géométrie sans cesse mouvante. La masse dicte la courbure qui, en retour, dicte les mouvements suivis par les masses. Qu'on ne s'y trompe pas : cette description n'est nullement réursive : elle constitue au contraire l'une des propositions sur le monde les plus cohérentes et les mieux testées dont nous disposons à l'heure actuelle. La trame spatiotemporelle devient malléable et dynamique.

L'enjeu de cet ouvrage – celui de la relativité générale – consiste donc simplement à :

- comprendre comment s'écrit la physique déjà connue (par exemple l'électromagnétisme) dans un espace muni d'une métrique $g_{\mu\nu}$ arbitraire et généralement différente de la forme $\eta_{\mu\nu}$ de la relativité restreinte ;
- comprendre comment la masse impose un choix particulier de métrique $g_{\mu\nu}$. Ou, plus exactement, quelles sont les équations d'évolution de la métrique compte tenu de la présence de corps.

1.3 RETOUR SUR LE PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

La présentation précédente est sans doute la plus immédiatement accessible. Elle permet de « sentir » en quelques minutes les idées fondatrices de la relativité générale

et d'introduire l'immense bouleversement conceptuel qu'elles constituent sans, justement, violer aucune des intuitions et connaissances déjà acquises. Il est néanmoins bénéfique de proposer dès maintenant une présentation alternative et complémentaire de la problématique³ (qui ne diffère évidemment pas de la précédente quant au contenu formel).

Dans la relation fondamentale de la dynamique $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, le terme m qui intervient est la masse inertielle. Elle n'a rien à voir avec la gravitation. Elle témoigne du fait qu'il est, par exemple, plus difficile de mettre en mouvement un wagon de train de 20 tonnes qu'un modèle réduit de 20 grammes, même si une lubrification parfaite permettrait de négliger les frottements. L'inertie est cette tendance des corps, d'autant plus marquée que m est grande, à s'opposer à toute modification de leur état précédent : accélérer ou décélérer un corps demande un effort.

Au contraire, dans la relation $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, le terme m qui intervient est la masse gravitationnelle. Elle n'a rien à voir avec l'inertie. Elle témoigne de l'intensité du couplage entre un champ $\mathbf{g}$ et un objet dont la masse gravitationnelle vaut m , exactement comme la charge électrique q témoigne de l'intensité de la force générée par un champ $\mathbf{E}$ sur un corps chargé. Ici, m doit être vue comme une *charge gravitationnelle*.

Le fait que deux objets de masses différentes chutent de la même façon dans le champ gravitationnel s'interprète dans le cadre newtonien comme une sorte de « miracle » : compte tenu de l'égalité – étrange – entre masse gravitationnelle et masse inertielle, le fait qu'un corps plus massif soit évidemment plus difficile à mettre en mouvement (c'est l'inertie) est exactement compensé par le fait qu'il est aussi plus intensément couplé avec le champ gravitationnel.

Cette « universalité de la chute libre » signifie que si l'on s'intéresse, localement, à un « repère en chute libre » en utilisant des corps et des horloges de référence soumis à la seule gravitation, tous les objets à proximité du repère sembleront n'être pas accélérés par rapport à lui. Un tel repère « efface » donc le champ gravitationnel. Là encore, cette procédure n'est possible que localement.

Puisque tout champ de gravitation est pratiquement constant dans une région suffisamment petite de l'espace-temps, il peut être effacé dans cette région. Or, en l'absence de gravitation, les lois de la physique sont valables dans les systèmes inertiels. Il est donc raisonnable de supposer que les référentiels qui effacent localement la gravitation – les référentiels en chute libre – sont aussi les systèmes inertiels, dans lesquels les lois de la physique locale sont valables. Ce postulat est le principe d'équivalence.

3. Il nous semble important que le lecteur se départisse d'une vision unitaire de la physique comme science purement déductive. Sentir la *diversité* des théories possibles et des manières de penser et de présenter une théorie donnée est aussi fondamental que d'en comprendre les vertèbres mathématiques. Les tensions et divergences (parfois cohérentes) qui se rencontrent au sein même d'un modèle ne devraient pas être escamotées : elles sont le cœur de la *praxis* scientifique.

Le principe d'équivalence permet de formuler toutes les lois (non gravitationnelles) de la physique, en présence d'un champ de gravitation, dans des régions suffisamment petites. Pour disposer d'une description macroscopiquement signifiante des phénomènes, il faut donc relier ces zones possédant des référentiels d'inertie locaux différents. C'est lors de cette opération que les effets de la gravitation sur la matière se révèlent en relativité générale. Afin de relier entre eux les différents référentiels, on peut introduire un système de coordonnées unique, qui n'est évidemment pas partout inertiel, et exprimer les lois de la physique dans ce système.

Soit x^μ les coordonnées dans un référentiel localement inertiel où les lois de la relativité restreinte s'appliquent donc. L'intervalle s'y écrit

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.2)$$

avec

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Quand on change de référentiel localement inertiel (au voisinage du même point) par une transformation de Lorentz, ds^2 est naturellement invariant (dans sa valeur et dans sa forme). En revanche, les transformations qui conduisent au référentiel non inertiel étendu, de coordonnées x'^μ , sont en général non linéaires. La valeur de l'invariant ds^2 calculée dans le système étendu x'^μ s'écrit, en utilisant (c'est la définition de la différentielle quand on considère les anciennes coordonnées comme des fonctions nouvelles) $dx^\alpha = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} dx'^\mu$ et $dx^\beta = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} dx'^\nu$:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu, \quad (1.4)$$

avec

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \quad (1.5)$$

Les coefficients $g_{\mu\nu}$ dépendent du point d'espace-temps : $g_{\mu\nu}(x'^\mu, x'^\nu)$. La métrique n'est plus minkowskienne (elle diffère de $\eta_{\mu\nu}$) : l'espace-temps est devenu riemannien !

Dans la totalité de cet ouvrage, il est nécessaire de lire l'énoncé complet de chaque exercice, y compris les remarques finales, avant de commencer à le résoudre.

1.1 Idée centrale de la relativité générale

1. Sur quel principe la construction de la relativité générale est-elle fondée ?
2. Pourquoi ne s'applique-t-il qu'au champ de gravitation ?

1.2 Invariance sous action du groupe de Poincaré

Dans cet exercice, nous nous intéressons à l'invariance, sous l'action du groupe de Poincaré, de l'intervalle en relativité restreinte. Ce groupe correspond à l'ensemble des symétries de la relativité restreinte et nous considérons ici quelques exemples de transformations constituant ce groupe. On munit l'espace-temps d'un repère R avec les vecteurs de base $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ et des coordonnées cartésiennes (t, x, y, z) . L'intervalle est $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

1. Montrez que l'intervalle est identique pour un repère R' dont les axes sont parallèles aux axes de R , et dont l'origine dans R se situe en $(t, x, y, z) = (T, X, Y, Z)$.
2. Montrez que l'intervalle est identique pour un repère R' situé en $(0, 0, 0, 0)$ dans R mais dont l'axe $\mathbf{e}_{t'}$ est de sens opposé à $\mathbf{e}_t$. Qu'en est-il pour un repère R' dont l'axe $\mathbf{e}_{x'}$ est de sens opposé à $\mathbf{e}_x$.
3. Montrez que l'intervalle est identique pour un repère R' situé en $(0, 0, 0, 0)$ dans R mais dont les axes $(\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'})$ sont tournés d'un angle θ par rapport à $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.
4. Montrez que l'intervalle est identique pour un repère R' situé en $(0, 0, 0, 0)$ dans R mais dont les axes sont tels que $t' = t \cosh(\psi) + x \sinh(\psi)$ et $x' = t \sinh(\psi) + x \cosh(\psi)$.

Considérons maintenant un système de coordonnées (τ, r, y, z) tel que l'intervalle est donné par $ds^2 = r^2 d\tau^2 - dr^2 - dy^2 - dz^2$. (On retrouve l'intervalle relativiste usuel en posant $t = r \sinh(\tau)$ et $x = r \cosh(\tau)$.) Sans entrer dans les détails, le référentiel associé à ce système de coordonnées (dit de Rindler) correspond à un référentiel uniformément accéléré.

5. L'intervalle *dans ce système* de coordonnées est-il toujours invariant sous l'action des transformations précédemment proposées ?

1.3 Un premier pas vers la relativité générale

On appelle ξ^μ les coordonnées dans un référentiel localement inertiel. Les lois de la relativité s'appliquent donc localement :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu \text{ et } \frac{d^2 \xi^\mu}{ds^2} = 0.$$

1. Écrivez ces deux lois pour un changement de coordonnées *non inertiel* $\xi^\mu \rightarrow x^{\mu'}$.
2. Si la seconde loi mentionnée ci-dessus s'interprète comme l'équation du mouvement dans un référentiel localement inertiel, commenter quant aux effets d'accélération et de gravitation.

Remarque

On notera que $\frac{d}{ds} = \sum_{\mu'=0}^3 \frac{dx^{\mu'}}{ds} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}$ ainsi que $\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^{\mu'}} \times \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial \xi^\mu} = \delta_{\mu'\nu'}$. Pour un changement de coordonnées non inertiel, le lien entre ξ^μ et $x^{\mu'}$ n'est *a priori* pas linéaire.

Corrigés

1.1

1. Le principe d'équivalence est au cœur de la relativité générale. En vertu de celui-ci, les caractéristiques du mouvement dans un champ de gravitation sont identiques au mouvement dans un référentiel accéléré (donc non inertiel).
2. Le mouvement dans un champ de gravitation est identique pour toutes les particules (il ne dépend pas des propriétés comme la masse ou la charge). Pour tout champ gravitationnel, il est possible de définir un référentiel accéléré, *indépendamment* des particules considérées, dans lequel les trajectoires sans gravité sont identiques aux trajectoires avec gravité vues depuis un référentiel inertiel. L'existence « universelle » d'un tel référentiel *indépendant* des particules n'a lieu que pour le cas de la gravitation et ne s'applique à aucune autre forme connue d'interaction.

1.2 En appelant (t', x', y', z') les coordonnées dans R' , l'intervalle dans ce référentiel s'écrit $ds'^2 = dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$. On cherchera à savoir si $ds'^2 = ds^2$.

1. Puisque $(t', x', y', z') = (t - T, x - X, y - Y, z - Z)$, on trouve

$$(dt', dx', dy', dz') = (dt, dx, dy, dz).$$

On a bien $ds'^2 = ds^2$. Cette transformation est une translation d'espace-temps.

2. On a cette fois-ci $(t', x', y', z') = (-t, x, y, z)$. Ainsi

$$(dt', dx', dy', dz') = (-dt, dx, dy, dz)$$

et l'intervalle est identique dans les deux référentiels. De même, nous avons

$$(dt', dx', dy', dz') = (dt, -dx, dy, dz)$$

et l'intervalle est identique dans les deux référentiels. La première transformation est le renversement du temps et la seconde le renversement d'une dimension d'espace (liée à la transformation de parité).

3. Sous une rotation d'angle θ , on a

$$\begin{aligned}x' &= x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ y' &= y \cos(\theta) - x \sin(\theta),\end{aligned}$$

tandis que $t' = t$ et $z' = z$. En injectant ces relations dans ds'^2 , on trouve $ds'^2 = ds^2$. Cette transformation est un *exemple* de rotation d'espace (une rotation d'angle θ et d'axe $\mathbf{e}_z$).

4. En injectant les expressions de t' et x' dans ds'^2 et en utilisant

$$\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1,$$

on montre de nouveau que $ds'^2 = ds^2$. Cette dernière transformation est une transformation de Lorentz (aussi appelée *boost*) écrite en fonction de la *rapidité* ψ . Il est intéressant de noter qu'avec une telle écriture, une transformation de Lorentz prend l'apparence d'une « rotation hyperbolique » entre une dimension d'espace et la dimension de temps.

5. En appliquant le même jeu de transformations que précédemment, on pourra vérifier que l'intervalle est invariant par translation, renversement du temps et renversement d'une dimension d'espace. Cependant, l'intervalle n'est pas invariant sous l'action d'une rotation dans les plans (r, y) et (r, z) (bien qu'il soit invariant sous l'action d'une rotation dans le plan (y, z)). En effet, si $r' = r \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ et $y' = y \cos(\theta) - r \sin(\theta)$, alors

$$\begin{aligned}ds'^2 &= r'^2 d\tau'^2 - dr'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= [r \cos(\theta) + y \sin(\theta)]^2 d\tau^2 - dr^2 - dy^2 - dz^2 \\ ds'^2 &\neq ds^2.\end{aligned}$$

De même, l'intervalle n'est pas invariant sous l'action d'une transformation de Lorentz. Par exemple pour une transformation de Lorentz dans le plan (τ, r) ,

$\tau' = \tau \cosh(\psi) + r \sinh(\psi)$ et $r' = r \cosh(\psi) + \tau' \sinh(\psi)$:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= r'^2 d\tau'^2 - dr'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= \left[(\tau \cosh(\psi) + r \sinh(\psi))^2 \cosh^2(\psi) - \sinh^2(\psi) \right] d\tau^2 \\ &\quad - \left[\cosh^2(\psi) - (\tau \cosh(\psi) + r \sinh(\psi))^2 \sinh^2(\psi) \right] dr^2 \\ &\quad - dy^2 - dz^2 + \left[(\tau \cosh(\psi) + r \sinh(\psi))^2 - 1 \right] d\tau dr. \end{aligned}$$

Clairement $ds'^2 \neq ds^2$. On pourra vérifier que l'on a aussi $ds'^2 \neq ds^2$ pour des transformations de Lorentz dans les plans (τ, y) et (τ, z) . Ces résultats ne sont pas étonnants car le référentiel considéré est accéléré.

1.3

1. On utilise le fait que pour un changement de coordonnées $dx^\mu = \sum_{\mu'=0}^3 \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'}$. On trouve alors pour la première loi :

$$ds^2 = \sum_{\mu'=0}^3 \sum_{\nu'=0}^3 \left(\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \right) dx^{\mu'} dx^{\nu'}.$$

Pour la seconde loi, on utilise $\frac{dx^\mu}{ds} = \sum_{\mu'=0}^3 \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{dx^{\mu'}}{ds}$:

$$\sum_{\mu'=0}^3 \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{d^2 x^{\mu'}}{ds^2} + \sum_{\mu'=0}^3 \sum_{\nu'=0}^3 \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \left(\frac{dx^{\mu'}}{ds} \right) \left(\frac{dx^{\nu'}}{ds} \right) = 0.$$

En multipliant par $\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\mu}$, on trouve finalement

$$\frac{d^2 x^{\lambda'}}{ds^2} = - \sum_{\mu'=0}^3 \sum_{\nu'=0}^3 \left(\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \right) \left(\frac{dx^{\mu'}}{ds} \right) \left(\frac{dx^{\nu'}}{ds} \right).$$

Le membre de droite ne s'annule pas car le lien entre ξ^μ (localement inertiel) et $x^{\mu'}$ (non inertiel) est en général non linéaire (i.e. $\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \neq 0$).

2. On voit que l'équation du mouvement dans un référentiel non-inertiel possède un terme de « force ». Dans le cas particulier d'un référentiel accéléré, ce terme correspond aux forces d'inertie. Puisque les caractéristiques du mouvement dans un champ de gravitation sont identiques au mouvement dans un référentiel accéléré (non inertiel), ce terme supplémentaire peut donc s'interpréter comme l'action de la gravitation sur le mouvement.

RELATIVITÉ RESTREINTE

2

INTRODUCTION

Ce chapitre n'est pas une introduction *ex nihilo* à la relativité restreinte. Le lecteur est supposé déjà familier avec les notions élémentaires de la théorie. Nous insistons plutôt sur les éléments spécifiques permettant la construction du modèle et ses conséquences les plus frappantes. Par-delà ses prédictions sur la structure de l'espace-temps, la relativité restreinte a ouvert la porte à une nouvelle manière de penser la physique en érigeant les symétries en principes.

2.1 CONSTRUCTION DE LA TRANSFORMATION DE LORENTZ

La théorie de la relativité restreinte constitue sans aucun doute l'une des révolutions épistémologiques les plus importantes de la science du XX^e siècle. Non seulement par ce qu'elle propose sur le monde mais aussi, et surtout, par ce qu'elle a changé dans la structure de la science elle-même. Pour la première fois dans l'histoire, une théorie allait se fonder sur une *symétrie* en tant que principe organisateur. Techniquement, on pourrait considérer que la relativité restreinte est de peu de conséquences puisqu'elle se traduit simplement par le passage d'un groupe de symétrie d'espace-temps à 10 paramètres (celui de Galilée) à un autre groupe de symétrie d'espace-temps à 10 paramètres (celui de Lorentz). Pourtant, pour la première fois, un principe de symétrie fut érigé au rang d'hypothèse fondatrice pour élaborer une théorie scientifique. C'est cette démarche qui s'est révélée extraordinairement fructueuse dans le développement des théories de jauge qui ont permis de colossales avancées en physique des particules élémentaires. Une théorie de jauge est une théorie fondée sur une symétrie. En théorie des champs, on réfère sous ce nom à un modèle où le Lagrangien¹ est invariant sous l'action d'un groupe de symétrie locale.

Comme tout modèle, la relativité restreinte repose sur un certain nombre d'hypothèses constitutives. Outre les suppositions usuelles de la physique classique, à commencer par l'existence d'un espace tridimensionnel et d'un temps unidimensionnel formant le cadre dans lequel les phénomènes peuvent être décrits, elle se distingue donc par des considérations de symétrie spécifiques.

1. Le Lagrangien d'un système est une fonction qui résume sa dynamique.

a) Homogénéité du temps

Les lois physiques sont invariantes par translation temporelle. Il ne s'agit pas ici de nier l'« écoulement du temps » (encore que cette formulation soit sujette à caution, nous y reviendrons) et l'évolution des phénomènes, mais simplement de noter la constance des lois qui les régissent. Quand Isaac Newton, par exemple, publie les *Principia Mathematica*, il ne spécifie pas que les propositions exposées ne sont valables qu'en l'an 1687 : bien au contraire, elles sont implicitement supposées justes depuis le passé le plus reculé jusqu'au futur le plus lointain. Les solutions des lois dépendent du temps mais *pas* les lois elles-mêmes.

b) Homogénéité de l'espace

Les lois physiques sont invariantes par translation spatiale. Là encore, il ne saurait être question de contester les irrégularités du contenu de l'espace, mais simplement de souligner la constance des lois par rapport à un déplacement dans l'espace. Newton, pour reprendre le même exemple, ne spécifie pas non plus que les *Principia* ne sont valables qu'à Cambridge : bien au contraire, les propositions sont implicitement supposées justes partout sur Terre et au-delà. Les solutions des lois dépendent de la position mais *pas* les lois elles-mêmes.

c) Isotropie de l'espace

Les lois physiques sont invariantes par rotation spatiale du référentiel d'origine. Il n'existe pas de direction privilégiée dans l'espace.

En résumé, l'énoncé d'une *loi* ne suppose ni l'énoncé du lieu ni celui du temps auquel elle est supposée valide. Cette propriété peut être considérée comme définitoire d'une loi. Elle est une sorte de condition de possibilité à l'intelligibilité physico-mathématique du réel (ou, plus exactement, d'une manière de composer le réel).

À ces symétries fondamentales, s'ajoutent les hypothèses suivantes :

- Le principe de relativité. Aucun système de référence n'est privilégié. Les grandeurs physiques ont une signification intrinsèque (sans qu'aucun contenu ontologique ne soit associé à cette idée) qui dépasse la manière de les décrire. Il existe des référentiels équivalents (au sens mathématique d'une relation d'équivalence) dans lesquels les lois physiques ont la même forme. On les nomme référentiels d'inertie et le mouvement libre des corps (c'est-à-dire soumis à aucune force) s'y effectue à vitesse vectoriellement constante.
- Le principe de causalité. Implicitement, toute la physique suppose que la cause précède la conséquence et cette propriété doit être conservée en relativité restreinte. Si un phénomène est antérieur à un autre dans un système de référence, il doit également l'être dans tous les autres. Cette propriété est à rapprocher de l'inégalité

de traitement entre l'espace et le temps dans les symétries fondamentales : le temps n'est pas isotrope.

Bien que cela ait joué un rôle historique important, il est fondamental de souligner que l'adjonction d'une hypothèse supplémentaire concernant l'existence d'une vitesse limite (définie par rapport à la lumière mais étrangement liée à toutes les forces) n'est pas nécessaire. Au contraire, cette vitesse (et son invariance par changement de référentiel d'inertie) apparaît comme une conséquence des hypothèses précédentes et peut être rigoureusement démontrée. Ce résultat central est l'objet des calculs qui suivent.

On considère deux référentiels R et R' en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre suivant l'axe des x et on cherche la relation entre les coordonnées (x, t) dans le premier et les coordonnées (x', t') dans le second. Il est important de noter dès à présent que l'enjeu de cette démarche est bien plus profond qu'un simple exercice formel de cinématique. La forme de la transformation résultante, dite de Lorentz, fixe la structure d'objets fondamentaux en relativité restreinte : les tenseurs.

2.1.1 Symétries

On pose

$$x' = f(x, t; p) \text{ et } t' = g(x, t; p), \quad (2.1)$$

où p est un paramètre qui distingue le référentiel R' du référentiel R (ce qu'il représente exactement dépend de la situation considérée) et f et g sont des fonctions inconnues. En différentiant la relation (2.1) on obtient :

$$dx' = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt \text{ et } dt' = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial t} dt. \quad (2.2)$$

L'hypothèse d'homogénéité de l'espace-temps impose que ces lois de transformation ne dépendent pas de la position spatio-temporelle, autrement dit que les dérivées partielles sont indépendantes des coordonnées. Il s'ensuit que f et g dépendent linéairement de x et t . On peut donc écrire :

$$x' = f_1(p)x + f_2(p)t \text{ et } t' = f_3(p)t + f_4(p)x, \quad (2.3)$$

où les fonctions f_i sont à déterminer. L'origine O' de R' (i.e. $x' = 0$) se déplaçant à la vitesse V par rapport à R , l'équation (2.3) conduit à $x = -f_2(p)t/f_1(p)$. Avec $V = x/t$, on obtient $V = -f_2(p)/f_1(p)$. Il s'agit donc d'une fonction de p qui peut être, tout aussi bien que p , utilisée pour caractériser les référentiels. C'est évident puisque seule la vitesse relative distingue R de R' . On réécrit alors l'équation (2.3) en fonction de V :

$$x' = f_1(p) \left(x + \frac{f_2(p)}{f_1(p)} t \right) \text{ et } t' = f_1(p) \left(\frac{f_3(p)}{f_1(p)} t + \frac{f_4(p)}{f_1(p)} x \right), \quad (2.4)$$

soit

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) \text{ et } t' = \gamma(V)(g_1(V)t - g_2(V)x), \quad (2.5)$$

avec $\gamma(V) \equiv f_1(p)$, $g_1(V) \equiv f_3(p)/f_1(p)$ et $g_2(V) \equiv -f_4(p)/f_1(p)$. Trois fonctions inconnues doivent être déterminées : $\gamma(V)$, $g_1(V)$ et $g_2(V)$.

L'hypothèse d'isotropie de l'espace impose que l'orientation des axes des référentiels n'intervient pas. Conséquemment, la transformation représentant le passage de R à R' doit présenter la même forme que celle représentant le passage de $r(R)$ à $r(R')$ où l'opérateur r correspond à une réflexion, c'est-à-dire à un changement de x en $-x$ et de x' en $-x'$. Dans cette opération, le sens des axes change, la vitesse de $r(R')$ par rapport à $r(R)$ vaut donc $-V$. Ce qui conduit à :

$$-x' = \gamma(-V)(-x + Vt) \text{ et } t' = \gamma(-V)(g_1(-V)t + g_2(-V)x). \quad (2.6)$$

En comparant l'équation (2.6) avec (2.5), on obtient :

$$\gamma(V) = \gamma(-V) ; \quad g_1(V) = g_1(-V) \text{ et } g_2(V) = -g_2(-V). \quad (2.7)$$

2.1.2 Structure de groupe

L'équivalence entre référentiels galiléens se traduit mathématiquement par la structure de groupe des transformations recherchées. La loi de composition est effectivement une loi de composition *interne* puisque le passage d'un référentiel R à un référentiel R' , puis de R' à R'' est équivalent à un passage de R à R'' , lui-même représenté par un élément de l'ensemble des transformations. Tout référentiel étant équivalent à lui-même, il existe un élément neutre trivial. L'associativité est assurée par le simple fait qu'il s'agit d'un ensemble de transformations et non pas d'éléments arbitraires (c'est l'argument déjà donné pour montrer que la loi est interne). Enfin, si l'on considère la transformation de R à R' , la transformation de R' à R permet de revenir au référentiel initial. Il existe donc bien un inverse. L'ensemble des transformations de Lorentz doit donc posséder une structure de groupe qui traduit fondamentalement le principe de relativité.

La transformation de R à R' doit avoir la même forme que la transformation de R' à R en changeant V en $-V$. Ce qui conduit, en reportant cela dans (2.5), à :

$$x = \gamma(-V)(x' + Vt') \text{ et } t = \gamma(-V)(g_1(-V)t' - g_2(-V)x'), \quad (2.8)$$

soit, en utilisant l'écriture (2.7) :

$$x = \gamma(V)(x' + Vt') \text{ et } t = \gamma(V)(g_1(V)t' + g_2(V)x'). \quad (2.9)$$

Si l'on utilise à nouveau les expressions de x' et t' , données par les relations (2.5), dans la première équation de (2.9), il s'ensuit :

$$x = \gamma(V) [\gamma(V)(x - Vt) + V\gamma(V)(g_1(V)t - g_2(V)x)], \quad (2.10)$$

$$= \gamma^2(V)(1 - g_2(V)V)x + \gamma^2(V)V(g_1(V) - 1)t. \quad (2.11)$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, quelles que soient les valeurs de x et de t , il faut avoir :

$$\gamma^2(V)(1 - Vg_2(V)) = 1 \quad \text{et} \quad g_1(V) = 1. \quad (2.12)$$

En remplaçant cette dernière égalité dans (2.5), on obtient :

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) \quad \text{et} \quad t' = \gamma(V)(t - g_2(V)x). \quad (2.13)$$

Reste donc à déterminer $\gamma(V)$ et $g_2(V)$, sachant que ces fonctions sont liées par la première égalité de (2.12).

C'est ce qui est permis par l'utilisation de la propriété de composition interne : la composée de deux transformations doit avoir la même forme que chacune des transformations. Soient R, R' et R'' trois référentiels galiléens. Soit V_1 la vitesse de R' par rapport à R et soit V_2 la vitesse de R'' par rapport à R' . D'après (2.13), on a entre R' et R'' :

$$x'' = \gamma(V_2)(x' - V_2t') \quad \text{et} \quad t'' = \gamma(V_2)(t' - g_2(V_2)x'). \quad (2.14)$$

En remplaçant x' et t' par leurs expressions (2.13), on obtient :

$$x'' = \gamma(V_2) [\gamma(V_1)(x - V_1t) - V_2\gamma(V_1)(t - g_2(V_1)x)], \quad (2.15)$$

$$t'' = \gamma(V_2) [\gamma(V_1)(t - g_2(V_1)x) - g_2(V_2)\gamma(V_1)(x - V_1t)], \quad (2.16)$$

ce qu'on peut réécrire sous la forme

$$x'' = \gamma(V_2)\gamma(V_1)(1 + V_2g_2(V_1)) \left[x - \frac{V_1 + V_2}{1 + V_2g_2(V_1)} t \right], \quad (2.17)$$

$$t'' = \gamma(V_2)\gamma(V_1)(1 + V_1g_2(V_2)) \left[t - \frac{g_2(V_1) + g_2(V_2)}{1 + V_1g_2(V_2)} x \right]. \quad (2.18)$$

Soit V_3 la vitesse de R'' par rapport à R . On peut écrire, en considérant directement la transformation de R à R'' sans passer par R' :

$$x'' = \gamma(V_3)(x - V_3t) \quad \text{et} \quad t'' = \gamma(V_3)(t - g_2(V_3)x). \quad (2.19)$$

Dans les équations (2.19), on voit que le coefficient de x dans l'expression de x'' est le même que celui de t dans l'expression de t'' . Quand on applique cette remarque à (2.17) et (2.18), on obtient $1 + V_2g_2(V_1) = 1 + V_1g_2(V_2)$, soit $V_2g_2(V_1) = V_1g_2(V_2)$.

Autrement dit $g_2(V_1)/V_1 = g_2(V_2)/V_2$, et ce rapport est nécessairement constant puisque les vitesses sont arbitraires. En nommant a cette constante, on est conduit à $g_2(V_1) = aV_1$.

Par ailleurs, en remarquant que l'expression de x'' dans (2.17) fait apparaître un terme $\left[x - \frac{V_1+V_2}{1+V_2g_2(V_1)}t \right]$ et que l'expression de x'' dans (2.19) fait apparaître un terme en $(x - V_3t)$, on en déduit : $V_3 = (V_1 + V_2)/(1 + V_1g_2(V_2))$. Soit, en tenant compte de l'expression de g_2 :

$$V_3 = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2 a}, \quad (2.20)$$

avec, suivant la première équation de (2.12) :

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - aV^2}}. \quad (2.21)$$

La racine positive a été choisie pour obtenir $\gamma(0) = 1$ qui est imposé par la limite de la théorie à faible vitesse. On obtient donc, en reprenant (2.13) avec la forme calculée pour g_2 :

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) ; t' = \gamma(V)(t - Vax) \text{ et } \gamma(V) = 1/\sqrt{1 - aV^2}. \quad (2.22)$$

a) Apparition d'une constante fondamentale

Compte tenu de l'expression de $\gamma(V)$, la constante a doit avoir pour dimension l'inverse du carré d'une vitesse. Notons cette vitesse c , telle que $|a| = 1/c^2$. Trois possibilités sont envisageables :

- Cas $a = 0$. Alors, $\gamma(V) = 1$ et on retrouve la transformation de Galilée (la vitesse c serait infinie). Cette solution n'est pas, *a priori*, impossible mais elle n'est pas à retenir pour deux raisons. D'une part, elle constitue un sous-ensemble de mesure nulle dans l'espace des solutions (et est donc extrêmement improbable) et, d'autre part, elle ne permettra pas de résoudre les difficultés de la physique classique.
- Cas $a < 0$. Il existe alors deux sous-cas :
 - Supposons qu'il n'existe pas de vitesse limite. Alors V_1 et V_2 peuvent avoir des valeurs arbitraires positives. D'après (2.20), $V_3 = (V_1 + V_2)/(1 + V_1 V_2 a)$, ce qui conduit, si $V_1 = V_2 \rightarrow \infty$, à $V_3 \approx (2V_1)/(aV_1^2) = 2/(aV_1)$. Cette quantité est négative par hypothèse (car $a < 0$), ce qui n'a pas de sens puisque V_1 et V_2 sont supposées positives. Ce cas est donc exclu.
 - Supposons qu'il existe une vitesse limite absolue V_l . Soient V_1 et V_2 inférieures à V_l . Il est facile de montrer que V_3 peut être supérieure à V_l , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Pour le voir, il suffit de prendre $V_2 = V_l - \epsilon$ où ϵ est une vitesse positive et de chercher si l'équation $V_3 = V_l + \epsilon$ a une solution avec $V_1 < V_l$.

Cela prouverait que la composition de deux vitesses plus petites que V_l conduit à une vitesse supérieure à V_l , ce qui est incompatible avec ce qui est supposé. Or, la loi de composition s'écrit alors $V_l + \epsilon = (V_l + V_l - \epsilon)/(1 + aV_l(V_l - \epsilon))$. Soit, en développant et réduisant : $V_l(1 - aV_l^2 + a\epsilon^2) = 2\epsilon$. Et donc $V_l = 2\epsilon/(1 + (\text{terme} > 0))$, ce qui est en effet plus petit que V_l si l'on choisit ϵ suffisamment petit. D'où la contradiction.

Le cas $a < 0$ est donc exclu.

- Cas $a > 0$. Alors, il existe une vitesse limite finie. En effet, dans $\gamma(V) = 1/\sqrt{1 - aV^2}$, il faut $aV^2 < 1$ et donc $V < c$. On vérifie aisément que la loi de composition des vitesses (2.20) est compatible avec cela au sens où, si V_1 et V_2 sont inférieures à c , alors V_3 l'est également. Il suffit de la réécrire sous la forme

$$V_3 = c \left[1 - \frac{(1 - \frac{V_2}{c})(1 - \frac{V_1}{c})}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \right], \quad (2.23)$$

où l'on voit clairement que $V_3 < c$. La composition de vitesses inférieures à c n'aboutit jamais à une vitesse supérieure à c . La vitesse limite c qui apparaît ici n'a *a priori* rien à voir avec la vitesse de la lumière. Elle est plutôt une *constante de structure fondamentale de l'espace-temps*. À aucun moment dans le raisonnement permettant de démontrer l'existence d'une vitesse limite, il n'est fait référence à l'électromagnétisme ou à la nature des interactions. La limite c est intrinsèque à l'espace-temps. Elle apparaît comme conséquence des symétries fondamentales et ne dépend pas du contenu ou de la forme particulière des lois. C'est la théorie des champs qui permet, par d'autres arguments, de l'associer effectivement à la vitesse de la lumière dans le vide, mais son origine n'est pas liée à la lumière.

Avec $a = 1/c^2$, où c est la constante de structure fondamentale de l'espace-temps (qui se trouve être aussi la vitesse de propagation des champs sans masse dans le vide), on a donc montré que les coordonnées se transforment suivant :

$$x' = \gamma(V) [x - Vt] ; \quad y' = y ; \quad z' = z ; \quad t' = \gamma(V) \left[t - \frac{Vx}{c^2} \right]. \quad (2.24)$$

Ce qui établit la transformation de Lorentz-Poincaré. Il est finalement remarquable que la construction de cet outil central pour toute la physique soit non seulement si simple mais surtout si économique en hypothèses conceptuellement coûteuses.

2.2 QUELQUES CONSÉQUENCES FONDAMENTALES

2.2.1 Tenseurs

À la différence de l'électromagnétisme ou de la physique nucléaire, par exemple, la relativité restreinte n'est pas une théorie s'appliquant à une interaction ou à une circonstance particulière. Elle est une « méta-théorie », une théorie-cadre à laquelle toutes les théories particulières doivent satisfaire. La transformation de Lorentz joue un rôle fondamental parce qu'elle fixe la loi de transformation générique qui préside au concept même de tenseur. Dans ce contexte, un tenseur de rang 1 est simplement un objet qui se transforme suivant la transformation de Lorentz. Un tenseur de rang n se transforme comme le produit de n transformations de Lorentz. En particulier, un tenseur de rang 0, un scalaire, est invariant par changement de référentiel. Il ne suffit donc pas d'avoir n indices pour être un tenseur de rang n : ce sont les propriétés de transformation qui sont essentielles. La masse, quantité n'ayant « aucun indice », est bien un scalaire car elle est la même dans tous les référentiels. En revanche, l'énergie, qui n'a pas non plus d'indice, est la composante d'un tenseur de rang 1 (un quadrivecteur) : elle n'est évidemment pas invariante par changement de référentiel, elle n'est pas un scalaire. Soit, par exemple, un objet $S^{\mu\nu}$ défini dans un référentiel R . Il est un tenseur de rang 2 si, et seulement si, il s'écrit dans un référentiel R' :

$$S^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} S^{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

où, comme pour toutes les équations tensorielles de ce livre à partir de maintenant, la notation d'Einstein est utilisée : quand un indice est répété, il y a simplement sommation sur celui-ci (même lorsque le signe « somme » n'est pas explicitement écrit). Il faut donc lire en fait

$$S^{\mu'\nu'} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} S^{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Les 16 termes $\partial x^{\mu'}/\partial x^{\mu}$ (ainsi bien sûr que les 16 termes $\partial x^{\nu'}/\partial x^{\nu}$) correspondent exactement aux coefficients de la matrice de Lorentz qui permet de passer du quadrivecteur x^{μ} au quadrivecteur $x^{\mu'}$. L'équation (2.25) est donc bien la traduction de ce que $S^{\mu\nu}$ se transforme comme annoncé. Il suffit pour s'en convaincre de noter d'une part que le quadrivecteur $x^{\mu'}$ est *fonction* du quadrivecteur x^{μ} : $x^{\mu'}(x^{\mu})$. La différentielle de $x^{\mu'}$ est alors donnée par

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}, \quad (2.27)$$

par définition de la différentiation. D'autre part, les quantités dx^μ et $dx^{\mu'}$ sont elles-mêmes des quadrivecteurs liés l'un à l'autre par la transformation de Lorentz (c'est l'équation (2.24), ci-dessous réécrite) :

$$dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} dx^{\mu} \quad (2.28)$$

où les $\Lambda^{\mu'}_{\mu}$ sont les coefficients de la matrice de Lorentz. Par identification de ces deux écritures, il apparaît clairement que la loi de transformation (2.25) correspond exactement à un produit de deux transformations de Lorentz, ce que nous énonçons comme définition d'un tenseur de rang 2. Nous choisissons délibérément dans cet ouvrage introductif de nous en tenir à cette version « historique » et intuitive de la définition des tenseurs qui est évidemment moins élégante et moins générale que l'approche maintenant usuelle en termes de formes multilinéaires et de variétés différentielles.

Cette transformation joue donc un rôle fondamental : toutes les quantités physiquement significatives doivent s'exprimer sous forme tensorielle. Les quantités étant ainsi *covariantes* (elles « varient comme », c'est-à-dire de la même façon), les équations résultantes sont bien *invariantes*. Cette contrainte est considérable. Si l'on écrivait une loi physique « aléatoirement », elle aurait toutes les chances de ne pas satisfaire à l'invariance de Lorentz. Qu'il faille s'y tenir, pour satisfaire à la structure intime de l'espace-temps, est un guide précieux dans l'élaboration d'une théorie physique. L'espace et le temps y étant traités de façon symétrique, il est, par exemple, immédiat de constater, sans avoir à recourir à la moindre expérience, que l'équation de Schrödinger utilisée en mécanique quantique est trivialement fautive puisqu'elle fait intervenir une dérivée première par rapport au temps, et seconde par rapport à l'espace :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right] \Psi = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.29)$$

Bien évidemment, cette équation conduit à des résultats approximativement corrects dans une certaine limite (l'équation de Schrödinger vérifiant l'invariance de Galilée) mais elle ne *peut pas* être une équation fondamentale. Ses généralisations relativistes (les équations de Klein-Gordon et Dirac) s'obtiennent en conciliant les prescriptions de la mécanique quantique avec les contraintes de la relativité restreinte. Outre son intérêt intrinsèque, il est remarquable que la mécanique quantique relativiste prédise naturellement l'existence du « spin ». Si celui-ci n'avait pas été introduit pour d'autres raisons, il serait nécessairement apparu comme une sorte de « charge de Lorentz ». Les effets relativistes ne sont donc pas du tout cantonnés aux vitesses proches de celles de la lumière et aux énergies élevées.

Dans le concept physiquement fondamental de « champ tenseur », c'est le caractère tensoriel qui est primordial. Un champ n'est qu'une fonction des coordonnées spatio-temporelles (en un sens plus profond, il peut donc être vu comme un système

de coordonnées). La dimension tensorielle, qui encode les propriétés des transformations (en l'occurrence suivant la matrice de Lorentz et ses itérations), est la propriété déterminante.

2.2.2 Retour sur les symétries

Comme on l'a vu, le point nodal de la construction de la transformation de Lorentz consiste à fonder la démarche sur des symétries : invariance par translation de l'espace et du temps, invariance par rotation de l'espace. Cette démarche s'est avérée être l'une des plus fructueuses de la physique du XX^e siècle. Elle est au cœur de la physique des particules élémentaires.

Le théorème de Noether montre que les symétries continues sont associées à des lois de conservation. Le concept d'énergie est, par exemple, fondamentalement lié à l'invariance des lois par translation temporelle.

Si l'on connaît un peu de mécanique Lagrangienne, cette propriété est très facile à démontrer. Le Lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i)$ (fonction qui contient l'information sur le système) ne doit pas dépendre explicitement du temps, sans quoi les lois ne seraient pas les mêmes hier et demain. Par suite, sa dérivée totale peut s'écrire :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i, \quad (2.30)$$

où les q_i sont les coordonnées et $\dot{q}_i$ les vitesses. Si L était fonction explicite du temps, il faudrait ajouter le terme $\frac{\partial L}{\partial t}$ au second membre. Cela signifierait que ce qui décrit le système évolue même quand « rien ne se passe », ce qui est évidemment impossible (toujours l'invariance des lois). En remplaçant les dérivées $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ par leurs valeurs $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ obtenues à partir des équations de Lagrange (*i.e.* par minimisation de l'action), on obtient :

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \quad (2.31)$$

soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0. \quad (2.32)$$

Ce qui montre que la grandeur $(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L)$ reste constante au cours du mouvement. Elle constitue l'une des intégrales premières, on l'appelle, par définition, **énergie** du système. Cet exemple est par ailleurs très éloquent pour qui aurait encore quelques doutes sur la différence entre une dérivée totale et une dérivée partielle. Bien évidemment $\frac{dL}{dt}$ n'est pas nul : il se passe quelque chose quand le système évolue ! Mais $\frac{\partial L}{\partial t}$ est nul car si aucun des constituants du système ne bouge (la dérivation partielle est effectuée à positions spatiales fixées), rien ne doit évidemment changer.

De même, les conservations de l'impulsion et du moment angulaire sont liées aux invariances des lois par translations et rotations spatiales.

Cette voie, en grande partie ouverte par la relativité restreinte, a permis une description extraordinairement précise du monde subatomique. Sans entrer dans les détails, on peut juste mentionner que l'idée centrale des théories de jauge consiste d'abord à identifier une symétrie. Dans le cas des interactions nucléaires fortes, par exemple, le concept de *quark* (mot issu du génial *Finnegan's Wake* de James Joyce) est lié aux représentations irréductibles (qui ne peuvent pas être décomposées sous forme de blocs diagonaux dans une représentation matricielle) du groupe de symétrie considéré qui traduit (entre autres) l'invariance de charge de l'interaction forte. On est loin des petites billes liées par des élastiques... Dans le domaine de l'interaction nucléaire faible, c'est, très schématiquement, l'invariance par rotation dans un espace électron-neutrino qui joue un rôle clé : de même que l'interaction forte ne distingue pas le proton du neutron, l'interaction faible ne distingue pas l'électron du neutrino. Plus simplement, dans le domaine de l'électrodynamique quantique (la quantification de la théorie de Maxwell), c'est l'invariance par changement de phase de la fonction d'onde qui dicte le choix du groupe à considérer. Toutes les interactions fondamentales du monde microscopique obéissent donc à un principe de *jauge*, c'est-à-dire de symétrie. Les médiateurs des forces (par exemple le photon pour l'électromagnétisme) apparaissent essentiellement lorsqu'on rend *locale* la jauge globale, ce qui est une opération *a priori* illicite. Intuitivement, on peut considérer que le photon « porte » les conventions qui définissent la phase de la fonction d'onde de l'électron en différents points d'espace-temps. Puisqu'on s'autorise une redéfinition locale d'une grandeur dont l'arbitraire n'est que global, il faut que l'information soit « transportée ». Cette symétrie s'accompagne naturellement d'une loi de conservation : en l'occurrence, la conservation de la charge électrique.

L'histoire, d'ailleurs, ne s'arrête pas ici. Si ces symétries permettent l'unification des interactions, force est de constater que le monde qui nous entoure n'est *pas* unifié. Comment réconcilier l'unité conceptuelle avec la diversité effective ? C'est l'enjeu de la *brisure spontanée de symétrie*. Dans ce processus, les solutions deviennent moins symétriques que les équations. C'est le cas d'un crayon posé sur sa pointe (et donc initialement parfaitement symétrique par rotation autour de son axe) qui tombe en privilégiant ainsi une direction particulière. C'est aussi ce qui advient lorsqu'un bol d'eau, statistiquement isotrope, gèle et que les dipôles des molécules d' H_2O s'alignent tous dans la même direction. Dans le cadre de la physique des particules élémentaires, permettre cette brisure spontanée de symétrie est le rôle central joué par le champ de Higgs.

La voie ouverte par la relativité restreinte en érigeant une symétrie (c'est-à-dire une invariance du système sous une certaine transformation) au rang de principe s'est

donc révélée extrêmement fructueuse. Au-delà de son utilité, elle souligne aussi l'importance (et, dans une certaine mesure, de l'arbitraire) du *choix* de ce qui est considéré comme premier et de ce qui sera dérivé dans l'élaboration d'une théorie.

2.2.3 Espace-temps

Le relativité restreinte ne s'inscrit, contrairement à ce qui est trop souvent écrit, pas réellement en faux par rapport à l'image kantienne du temps et de l'espace comme formes transcendantes (c'est-à-dire *a priori*) de la sensibilité. À la différence des tentatives plus spéculatives d'élaboration de théories quantiques de la gravitation, elle ne s'intéresse pas à l'émergence de l'espace et du temps mais en suppose bel et bien l'existence (ainsi d'ailleurs que la dimensionnalité : rien n'empêche d'écrire le groupe de Lorentz à D dimensions ; $D = 4$ n'est pas un cas privilégié). En revanche, elle montre de manière radicale l'indéfectible lien qui unit l'espace et le temps. Plus fondamentalement, il n'y a pas même de sens à évoquer l'espace et le temps : seul l'espace-temps est une quantité physique signifiante. Les phénomènes « étranges » permis par la relativité restreinte (voyages « dans le futur », enfants devenant plus vieux que leurs parents, etc.) perdent tout caractère paradoxal (cessent, en tous cas, d'être aporétiques) dès qu'il est pris conscience qu'il faut penser dans l'espace-temps. La quantité conservée en relativité restreinte, l'intervalle $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, est un mélange d'espace et de temps qui s'échangent l'un en l'autre. Il s'interprète comme une « longueur » dans un espace quadridimensionnel pseudo-euclidien. La présence des signes « $(-)$ » (le caractère *pseudo*-euclidien) est liée à ce que l'intervalle doit s'annuler pour le cas particulier des événements de type lumière, c'est-à-dire correspondant à l'émission et à la réception d'entités se propageant à la vitesse limite c . L'invariance de l'intervalle par changement de référentiel inertiel (il est très facile de voir que la transformation de Lorentz précédemment construite laisse l'intervalle invariant) se traduit donc géométriquement par une transformation laissant les longueurs (quadridimensionnelles) invariantes. Les translations sont possibles mais triviales, les réflexions ne sont pas continues et ne conservent pas la parité. Restent donc les rotations. Un changement de référentiel inertiel, c'est-à-dire une *translation* rectiligne uniforme dans l'espace se traduit donc par une *rotation* dans l'espace-temps : on « change » de l'espace en temps et du temps en espace².

La nécessité de penser l'espace-temps et non plus le temps et l'espace indépendamment se répercute également sur d'autres objets physiques. Le champ électrique, par exemple, n'existe pas. Il n'a aucun sens fondamental. Seul le « champ tenseur » électromagnétique est une quantité physique. Comme on le montrera un peu plus loin, l'application de la relativité à l'électrostatique impose l'existence du champ

2. Cette rotation dans l'espace-temps correspond à une rotation *hyperbolique* avec la signature lorentzienne.

magnétique. Imaginons un fil parcouru par un courant. Il est évidemment globalement neutre et l'observateur fixe par rapport au fil ne voit qu'un courant et, donc, un champ magnétique. Si maintenant l'observateur se met en mouvement à la même vitesse que les électrons parcourant le fil, il ne voit plus un courant mais des charges et, donc, un champ électrique. La distinction entre champs électriques et magnétiques n'a aucune légitimité ontologique, ils ne sont que des composantes d'un tenseur de rang 2 qui, naturellement, se transforment les unes en les autres par changement de référentiel.

2.2.4 $E = mc^2$

La formule liant l'énergie au repos à la masse, $E = mc^2$, est sans doute la plus connue de toute la physique. Mais, curieusement, ses conséquences profondes sont moins souvent énoncées que l'équation elle-même. Elle s'établit très simplement à partir du Lagrangien de la particule libre en mécanique relativiste (en écrivant $E = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$). Elle peut aussi être obtenue rapidement à l'issue de la construction du quadri-vecteur impulsion-énergie. Ce qui doit être souligné à propos du caractère proprement révolutionnaire de cette formule est le lien qu'elle établit entre une propriété « innée » (la masse) et une propriété « acquise » (l'énergie). La masse est liée à l'être. La masse d'un électron, par exemple, est la même partout et toujours. Sa valeur est proprement immuable pour une entité élémentaire donnée. Au contraire, l'énergie est sujette à variation : une particule mise en mouvement en acquiert sans cesser d'être ce qu'elle est. Ce lien est donc un pont jeté entre intrinsèque et extrinsèque, entre essentiel et accidentel. Il ouvre la voie à la possibilité de transformer de l'énergie en masse, c'est-à-dire une propriété en existence ! C'est un peu comme si l'on utilisait la qualité de timbre d'un instrument de musique pour en fabriquer un autre, sans détruire le premier. Et c'est effectivement ce qui est à l'œuvre dans les accélérateurs de particules où le mouvement des corpuscules est utilisé pour créer de nouvelles entités. La vitesse (l'énergie cinétique) crée de l'existence ! C'est une première porte ouverte sur la déconstruction de l'immuabilité du monde des particules élémentaires.

Mais, une fois de plus, l'histoire ne s'achève pas ici. Lorsque l'on s'intéresse à des particules qui ne sont plus nécessairement au repos, l'énergie est donnée par $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ où p est l'impulsion. Il existe deux solutions mathématiques : $E = \pm(m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2}$. Paul Dirac, dans un acte de bravoure intellectuelle remarquable, envisagea que la solution négative, qui émerge naturellement en relativité restreinte, ne soit pas un simple artéfact mais constitue le premier indice d'un monde caché. Ces entités d'énergie négative (et il n'est pas question ici d'énergie potentielle) ne s'accordent avec aucune vision intuitive classique. Dirac proposa, pour interpréter cela, l'existence d'un spectre d'énergie contenant tous les électrons (par exemple). Dans ce spectre les électrons « habituels » habitent une bande d'énergie dont la borne inférieure est mc^2 , leur distribution étant dictée par le principe d'exclusion de Pauli.

On peut alors supposer, comme le laisse entendre la formule précédente, l'existence d'une bande symétrique s'étendant de $-mc^2$ jusqu'à $-\infty$. Ces électrons d'énergie négative ne sont pas observables dans le monde réel. Afin d'éviter que les électrons réels d'énergie positive ne « tombent » dans des états d'énergie négative, il faut supposer que tout le spectre négatif est rempli et la stabilité est alors assurée par le principe de Pauli. C'est une description dans laquelle le monde semble reposer sur une mer invisible d'états d'énergie négative. Mais cette mer peut manifester sa présence dans le monde réel ! Les interactions entre particules élémentaires peuvent en effet transférer suffisamment d'énergie aux particules d'énergie négative pour leur permettre de franchir le *gap* les séparant du monde réel (le mot réel est ici opposé à virtuel au sens technique du terme et ne prend aucun parti pour un « réalisme » épistémologique). Un photon d'énergie légèrement supérieure à mc^2 peut, par exemple, interagir avec un électron d'énergie négative et le « transformer » ainsi en particule réelle. Mais il est bien sûr impossible de créer de la sorte une unité de charge électrique. De plus, le photon incident avait une énergie $E > 2mc^2$ et l'électron créé a une énergie juste supérieure à mc^2 . D'où une seconde difficulté de conservation d'énergie. Ces problèmes trouvent une solution si l'on admet que le trou laissé par l'électron dans la mer d'énergie négative représente en fait une entité réelle d'énergie positive et de charge opposée à celle de l'électron : l'absence d'une particule d'énergie négative équivaut à la présence d'une particule d'énergie positive. Cette particule est nommée *antiparticule* associée à l'électron (positon). Elle a été observée pour la première fois dès 1931. Ces antiparticules ont aussi pu être réinterprétées par Feynmann comme des particules remontant le cours de temps. On dispose bien sûr aujourd'hui de descriptions plus précises que les tâtonnements de Dirac. Mais, là encore, la relativité restreinte joue un rôle clé en ouvrant la porte de ce qui deviendra la théorie quantique des champs.

On peut aussi noter que la relativité restreinte est primordiale dans l'établissement du théorème spin-statistique qui relie des propriétés quantiques intrinsèques des particules à leurs propriétés statistiques. Elle est aussi fondamentale pour le théorème CPT qui exprime que tout système est invariant par le produit de trois symétries : la conjugaison de charge C (transformation matière/antimatière), la parité P (transformation par image miroir) et le renversement du sens du temps T.

2.2.5 Les équations de Maxwell

Il est édifiant de considérer l'exemple de l'électromagnétisme pour comprendre la portée du cadre « relativiste ». Montrons comment le simple fait d'exiger l'adéquation avec les prescriptions de la relativité restreinte permet de faire émerger les équations de Maxwell (et donc, en particulier, le champ magnétique) à partir de la seule

équation électrostatique de Poisson :

$$-\Delta\Phi = \rho, \quad (2.33)$$

où Φ est le potentiel électrostatique et ρ la densité de charge (on ne s'encombre pas ici des constantes ϵ_0 , etc.). Clairement, (2.33) n'est pas invariante de Lorentz, elle dissymétrise le temps et l'espace : il n'y a que des dérivées spatiales. Il faut donc remplacer le laplacien par un opérateur invariant de Lorentz : $-\Delta \rightarrow (\partial^\mu \partial_\mu = \partial^2/c^2 \partial t^2 - \Delta)$. En effet $\partial^\mu \partial_\mu$ est bien un scalaire et il se ramène à $-\Delta$ à la limite statique ($\partial/\partial t = 0$). On obtient donc :

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi = \rho. \quad (2.34)$$

Mais ρ est la première composante du quadrivecteur densité de courant j^μ . On peut donc écrire (2.34) comme

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi = j^0. \quad (2.35)$$

Cette équation doit être valable dans tous les référentiels. Les objets de part et d'autre du « signe = » doivent donc se transformer de la même façon, c'est-à-dire être des composantes tenseur de même type. Or, j^0 est la composante temps (la première composante) d'un quadrivecteur. Comme $\partial^\mu \partial_\mu$ est un scalaire, Φ doit être la première composante d'un quadrivecteur. Appelons-le A^μ avec, par définition, $A^0 = \Phi$. On peut donc écrire (2.35) comme :

$$\partial^\mu \partial_\mu A^0 = j^0. \quad (2.36)$$

Mais la transformation de Lorentz mélange les composantes. C'est sa caractéristique fondamentale (le « mélange » temps-espace) qui se lit algébriquement dans le fait que c'est une matrice. La relation (2.36) ne peut donc être valable dans tous les référentiels *que* si elle est aussi vérifiée par les autres composantes : $\partial^\mu \partial_\mu A^1 = j^1$, etc. Il faut donc écrire :

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = j^\nu. \quad (2.37)$$

Cette équation, invariante de Lorentz, est l'équation fondamentale de l'électrodynamique relativiste. Si on la dérive (en appliquant ∂_ν), on obtient $\partial^\mu \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = \partial_\nu j^\nu$. Or, en notation relativiste, l'équation de continuité $\text{div}(\mathbf{j}) + \partial\rho/\partial t$ s'écrit $\partial_\nu j^\nu = 0$. On a donc $\partial^\mu \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0$. Si on appelle $\Psi = \partial_\nu A^\nu$, cela s'écrit $\partial^\mu \partial_\mu \Psi = 0$. C'est une équation d'onde dans laquelle j^μ n'intervient pas. Les ondes Ψ sont libres et n'interagissent pas avec les particules chargées, elles sont sans lien avec l'électrodynamique. On peut donc, sans perte de généralité, imposer $\Psi = 0$, soit :

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (2.38)$$

En l'état, on ne connaît que la signification physique de A^0 . Dans le cas statique, $\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi$, soit $E^i = \partial^i A^0$ ($\partial^1 = -\partial/\partial x$)... Cela signifie que E_1 , E_2 et E_3 sont

les composantes (1,0), (2,0) et (3,0) du tenseur $\partial^\mu A^\nu$. C'est un résultat non trivial ! On aurait pu supposer que le « tri-vecteur » $\mathbf{E}$ allait devenir un quadrivecteur. Il n'en est rien : les termes $\partial^i A^0$ sont clairement les composantes d'un tenseur de rang 2. Evidemment, les relations $E^i = \partial^i A^0$ ne sont valides que dans le cas statique. Dans le cas général, on peut seulement inférer à ce stade que E^i est une partie d'un tenseur de rang 2 qu'on note $F^{\mu\nu}$: $E^k = F^{k0}$ où $F^{\mu\nu}$ est baptisé le champ-tenseur électrodynamique. Soit à partir d'arguments généraux, soit en étudiant le mouvement d'une charge dans un champ, il n'est pas difficile de montrer que $F^{\mu\nu}$ est antisymétrique : $F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu} = 0$. Supposons maintenant que le champ tenseur soit une fonction linéaire du potentiel. On peut accepter cette supposition sur une base de « naturalité » ou la voir comme un développement au premier ordre pour les courants faibles. Bien qu'elle soit très raisonnable, il est important de noter ici que la construction d'une théorie physique est très « sous-déterminée » par les principes généraux et que beaucoup d'arbitraires entrent dans le processus. Pour construire le champ tenseur à partir des « objets » à disposition (le potentiel A^μ et le quadrivecteur de dérivation ∂^ν), on peut facilement se convaincre que la seule solution linéaire et antisymétrique est :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.39)$$

Ce tenseur a 6 composantes non nulles indépendantes. On choisit de les appeler $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ (de façon que les composantes E_x, E_y, E_z soient cohérentes avec ce qui était appelé jusqu'alors « champ électrique ») :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Les composantes E_x, E_y, E_z coïncident bien avec le champ électrique usuel à la limite électrostatique. À ce stade, il est important de noter que, comme nous le suggérons précédemment, *le champ électrique n'existe pas*. Tout comme le champ magnétique. Seul le champ tenseur fait sens. De la même manière que l'espace et le temps sont intimement liés et ne peuvent être séparés, les « champs » électriques et magnétiques n'ont aucune existence autonome : ils ne sont que les composantes d'un tenseur de rang 2. Clairement, le « champ magnétique » (qu'il peut, évidemment, être opportun de nommer ainsi dans certains contextes) apparaît inéluctablement quand on rend relativiste la théorie électrostatique.

Calculons la dérivée du champ tenseur : $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu$. D'après (2.37), $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu$ et, d'après (2.38), $\partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$. On obtient donc :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.41)$$

C'est la première équation de Maxwell. La seconde (il n'y en a que deux en formalisme covariant) s'obtient par une démarche analogue :

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0. \quad (2.42)$$

En écrivant (2.41) pour $\nu = 0$, on trouve immédiatement $\text{div}(\mathbf{E}) = \rho$ et pour $\nu = 1, 2, 3$ on obtient $\text{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j} + \partial\mathbf{E}/\partial t$. Les deux autres équations de Maxwell « usuelles » s'obtiennent à partir de (2.42) (par exemple $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$ correspond à $\mu = 1, \nu = 2, \sigma = 3$). Les équations de Maxwell sont néanmoins beaucoup plus élégantes sous la forme (2.41) et (2.42), qui est manifestement covariante, que sous l'écriture développée en termes de rotationnels et divergences. Elles s'obtiennent simplement à partir de l'électrostatique, grâce au corpus relativiste.

En tant que cadre ou « méta-théorie », la relativité restreinte a donc ouvert la voie aux théories de jauge et à la théorie quantique des champs. L'invariance de Lorentz constitue, de plus, une contrainte très forte pour élaborer un modèle physique. D'un point de vue mathématique, qu'on ne développera pas ici, toute théorie de champ relativiste doit satisfaire – nous ne considérons pas pour le moment l'effet de la gravitation – au groupe de Poincaré qui est le produit semi-direct (c'est une manière particulière d'obtenir un groupe à partir de deux sous-groupes dont l'un est normal) des translations et du groupe de Lorentz : $\mathbf{R}^{1,3} \rtimes O(1,3)$.

Exercices

2.1 Tige et trou

Dans un référentiel R muni des coordonnées $(t, \mathbf{x})$, on considère une tige A de longueur propre L , se déplaçant à la vitesse V le long de l'axe x et située en $y = y_A = 0$. Les axes x_A, y_A, z_A du référentiel R_A centré sur la tige sont alignés sur les axes x, y, z . On considère de plus une tige infiniment longue le long de l'axe x se déplaçant à la vitesse V le long de y . Cette « tige » infiniment longue possède toutefois un trou B de longueur propre L et centré en $x = x_B = 0$. Les axes x_B, y_B, z_B du référentiel R_B centré sur le trou sont alignés sur les axes x, y, z . La dynamique est telle qu'à $t = t_A = t_B = 0$, les centres de la tige A et du trou B se trouvent tous deux en $(x, y) = (0, 0)$. La tige passe-t-elle à travers le trou ?

1. En utilisant la formule de contraction des longueurs, calculer la longueur du trou dans le référentiel de la tige à $t = 0$? La tige peut-elle *a priori* passer dans le trou ?
2. Calculer la longueur de la tige dans le référentiel du trou à $t = 0$? Voyez-vous un paradoxe ?

3. Calculer la trajectoire des extrémités du trou dans le référentiel de la tige ? Le trou est-il aligné sur l'axe x_A ? Le paradoxe est-il résolu ? (On pourra s'intéresser aux portions d'espace respectivement couvertes par la tige et par le trou.)

2.2 Dynamique relativiste et mouvement uniformément accéléré

Pour une particule se déplaçant à la vitesse V , on définit les quantités $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ et $a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ avec τ le temps propre de la particule.

1. Montrez que u^μ et a^μ sont des quadri-vecteurs ? Interprétez chacun de ces quadri-vecteurs.
2. Montrez que $u_\mu u^\mu = 1$. Donnez les composantes de u^μ en fonction de $\gamma(V)$ et V .
3. Montrez que $a_\mu u^\mu = 0$.

On considère une fusée quittant la Terre à un instant $t = 0$ dans le référentiel terrestre, supposé inertiel. Dans le référentiel propre de la fusée, cette dernière subit une accélération *constante* suivant l'axe x de $a = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Du point de vue de la Terre, le voyage dure 75 ans.

4. Quelle est l'accélération à un instant t quelconque dans le référentiel de la Terre ?
5. Écrivez et résolvez l'équation du mouvement de la fusée dans le référentiel de la Terre.
6. Quelle est la distance parcourue par la fusée ?
7. Combien de temps s'est écoulé du point de vue de la fusée ?
8. Quelle est la forme de la trajectoire de la fusée dans le plan (t, x) ?

Remarque

Pour une particule de masse m soumise à une quadri-force F^μ , l'équation fondamentale du mouvement est

$$m \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu.$$

Au-delà de l'aspect formel de l'exercice, il est intéressant de se poser la question dans l'autre sens : pour un homme vivant 75 ans dans sa fusée, soumis à une accélération constante de $9,81 \text{ m.s}^{-2}$ (et donc à une agréable gravitation artificielle), combien de temps s'est-il passé sur Terre. Vous trouverez un résultat gigantesque ! Si l'on ignore les contraintes technologiques, la relativité permet de magnifiques voyages dans un futur *très* lointain.

2.3 Lagrangien relativiste

On se propose ici d'étudier la formulation Lagrangienne de la mécanique relativiste en utilisant les quadri-vecteurs. En physique moderne, la formulation Lagrangienne est essentielle car elle permet de construire des théories invariantes suivant certaines symétries.

Nous rappelons tout d'abord que la dynamique d'un système peut se décrire à partir de son Lagrangien $L(q(\tau), \dot{q}(\tau); \tau)$, où τ est un paramètre d'évolution, et $q(\tau)$, $\dot{q}(\tau) \equiv \frac{\partial q}{\partial \tau}$ sont les deux variables conjuguées de position et vitesse. De façon générique, la dynamique est obtenue par le principe de moindre action, conduisant aux équations de Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

L'impulsion généralisée se définit comme $P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Nous appellerons $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ et $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ la quadri-position et la quadri-vitesse (ds correspond à l'intervalle $ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$).

Considérons les deux Lagrangiens –et actions associées– suivants :

$$L_N(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}; t) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2, \quad S_N = \int_{t_i}^{t_f} L_N dt$$

$$L_R(x^\mu, u^\mu; s) = \alpha \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}, \quad S_R = \int_{s_i}^{s_f} L_R(x^\mu, u^\mu; s) ds.$$

m est la masse de la particule et α une constante.

1. Lequel des deux Lagrangiens proposés ci-dessus est *a priori* une description appropriée de la dynamique d'une particule relativiste ? Dans quel régime physique le « mauvais » Lagrangien peut-il être utilisé ?
2. Cherchez la limite non relativiste de $L_R ds$ et déterminez α .
3. Calculez l'impulsion généralisée P^μ et interprétez sa composante temporelle et ses composantes spatiales.
4. Calculez la quantité $\eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$, et retrouvez l'expression de l'énergie d'une particule libre relativiste.
5. Considérons pour finir une particule chargée évoluant dans un champ électromagnétique. Le Lagrangien s'écrit alors

$$L_{EM}(x^\mu, u^\mu; A^\mu; s) = -m \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} - q \eta_{\mu\nu} A^\mu(x^\mu) u^\nu,$$

avec $A^\mu(x^\mu)$ le quadri-vecteur « potentiel » électromagnétique, fonction de x^μ et q une constante.

- (a) Interprétez chacun des termes du Lagrangien ainsi que la constante q .
- (b) Déterminez l'équation d'Euler-Lagrange décrivant le mouvement de la particule. (On pourra écrire explicitement les composantes spatiotemporelles de cette équation pour interpréter ce résultat.)

Corrigés

2.1

1. Le référentiel R_B se déplaçant suivant l'axe y , la longueur du trou dans R est égale à sa longueur dans R_B . Le référentiel R se déplaçant à la vitesse $-V$ suivant x par rapport à R_A . La longueur du trou est donc *a priori* contractée :

$$\text{dans } R_A: L_{\text{trou}} = L \sqrt{1 - V^2}.$$

Dans R_A , on a donc $L_{\text{trou}} < L_{\text{tige}}$ et la tige ne pourrait pas passer à travers le trou.

2. En effectuant le raisonnement inverse au précédent, on trouve que la longueur de la tige est « contractée » dans le référentiel R_B :

$$\text{dans } R_B: L_{\text{tige}} = L \sqrt{1 - V^2}.$$

Dans R_B , on a donc $L_{\text{trou}} > L_{\text{tige}}$ et la tige pourrait passer à travers le trou.

Évidemment, le paradoxe n'est ici qu'apparent et provient, comme le montre la suite, d'une application naïve de la contraction des longueurs.

3. Nous calculerons la transformation de Lorentz passant de R_B à R_A en deux étapes :

Étape 1 : passage de R_B à R

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma [t_B + V y_B] \\ x_B \\ \gamma [y_B + V t_B] \\ z_B \end{pmatrix}.$$

Étape 2 : passage de R à R_A

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma [t - V x] \\ \gamma [x - V t] \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2 t_B - \gamma V x_B + V \gamma^2 y_B \\ \gamma x_B - \gamma^2 V^2 y_B - \gamma^2 V t_B \\ \gamma y_B + \gamma V t_B \\ z_B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans R_B , les trajectoires des extrémités du trou sont données par les quadri-coordonnées suivantes : $(t_B, -L/2, 0, 0)$ et $(t_B, L/2, 0, 0)$. En substituant ces trajectoires dans la transformation de Lorentz ci-dessus et en éliminant t_B , on obtient

$$\text{dans } R_A: \begin{cases} x_{(-)} = -Vt_A - \frac{L}{2}\gamma(1 - V^2) \\ y_{(-)} = \frac{V}{\gamma}t_A - \frac{V^2L}{2} \end{cases}$$

pour l'extrémité située en $-L/2$ dans R_B , et

$$\text{dans } R_A: \begin{cases} x_{(+)} = -Vt_A + \frac{L}{2}\gamma(1 - V^2) \\ y_{(+)} = \frac{V}{\gamma}t_A + \frac{V^2L}{2} \end{cases}$$

pour l'extrémité située en $+L/2$ dans R_B . L'extrémité $(-)$ du trou suit une trajectoire linéaire dans R_A passant par les deux points suivants :

$$(x_{(-)}, y_{(-)}) = \left(-\gamma\frac{L}{2}, 0\right) \text{ et } \left(0, -\frac{L}{2}\right).$$

L'extrémité $(+)$ du trou suit une trajectoire parallèle à celle de l'extrémité $(-)$ passant par

$$(x_{(+)}, y_{(+)}) = \left(\gamma\frac{L}{2}, 0\right) \text{ et } \left(0, \frac{L}{2}\right).$$

L'axe du trou n'est pas aligné suivant x_A mais présente une inclinaison donnée par $\tan \theta = \left| \frac{y_{(+)} - y_{(-)}}{x_{(+)} - x_{(-)}} \right| = \gamma \times V^2$. Pour résoudre le « paradoxe », on peut tracer les trajectoires des extrémités du trou dans le plan (x_A, y_A) . On remarquera alors que la portion d'espace couverte par le trou correspond à une bande inclinée ayant une largeur supérieure à L (on se rappellera pour cela que $\gamma > 1$) et contenant bien l'ensemble des points en $-L/2 < x_A < L/2$ et $y_A = 0$, c'est-à-dire la tige.

2.2

1. On notera que $d\tau^2 = ds^2$ est invariant par changement de référentiel inertiel. Pour un tel changement, on a donc $u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} u^{\mu}$ et $a^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} a^{\mu}$: ce sont des quadri-vecteurs. u^{μ} est la quadri-vitesse et a^{μ} est la quadri-accélération.
2. En partant de la définition de la quadri-vitesse, on montre que

$$u_{\mu} u^{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{ds} \frac{dx^{\mu}}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1.$$

En utilisant $d\tau = \sqrt{1 - V^2} dt$, on obtient $u^{\mu} = (\gamma(V), \gamma(V)\mathbf{V})$.

3. On dérive $u_{\mu} u^{\mu} = 1$ par rapport à τ pour aboutir à $u_{\mu} a^{\mu} + a_{\mu} u^{\mu} = 0$, qui se réduit donc à $a_{\mu} u^{\mu} = 0$.
4. A un instant t quelconque, on considère le référentiel inertiel R_f suivant : i) il se déplace à la vitesse $\mathbf{V}$ strictement égale à la vitesse de la fusée à t , ii) son origine coïncide exactement avec la position de la fusée à t . Ainsi, la fusée est

« immobile » dans R_f . En se rappelant que $a^\mu u_\mu = 0$ et que dans R_f à l'instant t : $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, on montre que $a^{0'} = 0$ dans le référentiel R_f . On a alors dans R_f , la quadri-accélération constante donnée par $a^{\mu'} = (0, a, 0, 0)$. Cette quadri-accélération vaut donc dans le référentiel terrestre : $a^\mu = (a\gamma(V)V, a\gamma(V), 0, 0)$.

Il est important de garder à l'esprit que ce changement de référentiel dépend de la dynamique de la fusée. À chaque instant, la vitesse de la fusée change. Il faut donc, à chaque instant, considérer un nouveau référentiel inertiel R_f qui coïncide avec la fusée et dans lequel la quadri-accélération est bien constante.

5. En appelant τ le temps propre et u^μ la quadri-vitesse de la fusée, la dynamique est donnée par

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = a^\mu.$$

Dans le référentiel terrestre muni des coordonnées $(t, \mathbf{x})$: $d\tau = \gamma^{-1}(V)dt$ et $u^\mu = (\gamma(V), \gamma(V)\mathbf{V})$. En se limitant à la composante suivant x (la composante t aboutit au même résultat), la dynamique donne

$$\frac{dV}{dt} = (1 - V^2)^{3/2} a,$$

dont la solution est

$$V(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2}}.$$

On en déduit la trajectoire de la fusée avec comme condition initiale $x(t = 0) = 0$:

$$x(t) = \frac{1}{a} \left(\sqrt{1 + a^2 t^2} - 1 \right).$$

6. La distance parcourue par la fusée pendant $\Delta t = 75$ ans est $\Delta x \sim 2,34 \times 10^9$ m.

7. Le temps écoulé du point de vue de la fusée est

$$\Delta\tau = \int_0^{\Delta t} \sqrt{1 - V^2(t)} dt = a^{-1} \operatorname{arcsinh}(a\Delta t).$$

Pour $\Delta t = 75$ ans et $a = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, on trouve donc $\Delta\tau = 4,9$ ans.

8. En calculant explicitement $x = f(\tau)$ et $t = f(\tau)$, on trouve

$$\begin{cases} t = a^{-1} \sinh(a\tau) \\ x = a^{-1} [\cosh(a\tau) - 1] \end{cases}.$$

La trajectoire est donc hyperbolique.

2.3

1. On remarque que L_N et S_N ne sont pas invariants sous une transformation de Lorentz tandis que L_R et S_R le sont : L_R est a priori un bon choix car il aboutit à une physique indépendante du choix du référentiel inertiel. Le Lagrangien L_N est toutefois une bonne description dans la limite non relativiste.
2. Dans un référentiel donné, $R = (t, \mathbf{x})$, le Lagrangien s'écrit

$$L_R ds = \alpha \sqrt{1 - \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2} dt.$$

La limite non relativiste est une limite de faible vitesse : $\left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \ll 1$. On obtient donc

$$L_R ds \simeq \alpha - \frac{1}{2} \alpha \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2.$$

Il faut choisir alors $\alpha = -m$ pour que la limite non relativiste coïncide avec le Lagrangien newtonien L_N , le terme constant d'ordre zéro en vitesse n'ayant aucune contribution aux équations d'Euler-Lagrange.

3. La quadri-impulsion généralisée vaut

$$P^\mu = \frac{\partial L_R}{\partial u_\mu} = \frac{-m u^\mu}{\sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}}.$$

Dans un référentiel donné, $R = (t, \mathbf{x})$, cela donne

$$P^t = -m \frac{dt}{ds} = \frac{-m}{\sqrt{1 - \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2}},$$

$$\mathbf{P} = -m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{-m \frac{d\mathbf{x}}{dt}}{\sqrt{1 - \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2}}.$$

On trouve donc $P^t = -E$ et $\mathbf{P} = -\mathbf{p}$, avec E et $\mathbf{p}$ l'énergie et l'impulsion de la particule.

4. On a d'une part :

$$\eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = \left(\frac{m}{\sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}} \right)^2 \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = m^2$$

et d'autre part

$$\eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = (P^t)^2 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = E^2 - |\mathbf{p}|^2.$$

On retrouve donc

$$E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2.$$

5. (a) Le premier terme correspond au Lagrangien de la particule libre et le second au Lagrangien d'interaction entre le champ électromagnétique et la particule. La constante q est la charge électrique de la particule.
- (b) L'équation d'Euler-Lagrange pour la particule s'écrit

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L_{EM}}{\partial u_\lambda} - \frac{\partial L_{EM}}{\partial x_\lambda} = 0.$$

On a tout d'abord

$$\frac{\partial L_{EM}}{\partial u_\lambda} = -mu^\lambda - qA^\lambda$$

(on notera pour cela que $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$) et

$$\frac{\partial L_{EM}}{\partial x_\lambda} = -q\eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\lambda} \right) u^\nu.$$

En utilisant $\frac{d}{ds} = \eta_{\mu\nu}u^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, on trouve alors :

$$m \frac{du^\lambda}{ds} = q\eta_{\mu\nu}u^\nu \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu} \right).$$

On reconnaît dans le terme de droite le tenseur de Maxwell. Il apparaît donc comme la généralisation spatio-temporelle de la force de Lorentz.

QU'EST-CE QUE LA COURBURE ?

3

INTRODUCTION

Ce chapitre entend introduire de manière intuitive la notion de courbure. Après avoir énoncé le principe d'équivalence, les propriétés élémentaires des espaces courbes seront présentées au travers d'exemples à deux dimensions. Le cas de l'espace-temps quadridimensionnel est finalement évoqué afin d'y démontrer explicitement l'existence d'une courbure irréductible.

3.1 PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE : UN PEU PLUS PRÉCISÉMENT

Comme le lecteur l'a sans doute déjà remarqué, il existe plusieurs formulations du principe d'équivalence. Deux formulations usuelles sont, par exemple :

- la chute libre des corps est universelle (nommons cet énoncé le principe d'équivalence de Galilée) ;
- la masse gravitationnelle est égale à la masse inertielle (nommons cet énoncé le principe d'équivalence de Newton).

Ces deux énoncés ne sont pas aussi identiques qu'on pourrait le croire. Considérons, par exemple, le mouvement d'une particule quantique dans un potentiel gravitationnel ϕ . Ce n'est pas une expérience de « gravitation quantique », juste le déplacement d'un objet quantique dans un champ de gravité classique. L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + m\phi\Psi = E\Psi. \quad (3.1)$$

Étonnamment, on peut constater que les termes m ne se simplifient pas ! Autrement dit, le principe d'équivalence de Galilée semble violé au niveau quantique. On avait noté au chapitre précédent que l'équation de Schrödinger n'était pas valable du point de vue de la relativité (restreinte) mais ce n'est pas l'origine de cette étrange constatation, qui demeure lorsqu'on considère ses généralisations relativistes. Cela signifie qu'on peut mesurer la masse des particules quantiques en observant leur chute dans le champ de gravitation, ce qui est évidemment impossible du point de vue classique. Cette expérience fut même explicitement réalisée avec succès pour des

neutrons froids. L'universalité de la chute libre ne semble pas respectée. Le principe d'équivalence de Newton, lui, l'est assurément : les masses inertielles (le m de $-\hbar^2/2m$) et gravitationnelles (le m de $m\phi$) demeurent identiques. Il est intéressant de noter dès à présent que cette « tension » entre le principe d'équivalence et la mécanique quantique pose question quant à l'interprétation purement géométrique de la gravitation qui sera développée tout au long de cet ouvrage et qui constitue la vision orthodoxe de la relativité générale : il n'est effectivement pas évident de concilier une vision purement géométrique avec une « manière de tomber » qui dépend de la masse. Elle ne l'invalide pas mais interroge, à l'évidence, certains aspects de ses fondements. L'interprétation la plus simple consiste à considérer que l'universalité de la chute libre est scrupuleusement respectée et que l'effet en question est absolument indépendant de la gravitation : la masse intervient déjà dans le mouvement d'une particule libre en mécanique quantique (étalement du paquet d'ondes) ! D'un point de vue pédagogique, il peut sembler curieux d'introduire un cours de relativité générale par ce constat (élémentaire et bien connu des spécialistes de la question mais généralement passé sous silence dans les textes introductifs et même dans la plupart des monographies plus détaillées) qui semble –en première lecture– s'inscrire en faux par rapport au but recherché. Nous pensons, au contraire, que l'enseignement de la physique devrait d'avantage présenter les difficultés, les controverses, les zones d'ombre qui constituent le cœur nourricier de la réflexion et de la pensée scientifique. L'idée d'une théorie unique déductible, sans aucune bifurcation, d'un petit nombre de principes et décrivant de manière objective l'« en-soi » de la nature nous semble devoir être déconstruite.

Heureusement, le principe d'équivalence qu'on nommera « d'Einstein » et qui sera utilisé dans toute la suite de ce livre n'est pas remis en cause. On peut le formuler ainsi :

En tout point d'espace-temps, il est possible de choisir un système de coordonnées localement inertiel tel que, dans une région suffisamment petite, les lois de la physique prennent la même forme que dans un système de coordonnées cartésiennes non accéléré en l'absence de gravitation.

Par « la même forme que dans un système de coordonnées cartésiennes non accéléré en l'absence de gravitation », on entend, notamment, compatible avec la relativité restreinte. Par « une région suffisamment petite », on entend une région telle que le champ peut y être considéré comme uniforme.

On trouve parfois dans la littérature une distinction entre principe d'équivalence faible et principe d'équivalence fort. Ils ne diffèrent qu'en cela que le principe fort inclut *toutes* les lois de la nature et suppose donc que même l'énergie gravitationnelle doit obéir au principe d'équivalence.

Nous avons montré, dans le premier chapitre, pourquoi le principe d'équivalence invitait à penser la gravitation en termes géométriques : l'intervalle, qui encode la géométrie, prend une forme non triviale qui se traduit par l'apparition d'une courbure. Il est donc nécessaire de comprendre la signification de la courbure. Ce que nous entreprendrons d'abord avec des surfaces et, ensuite, avec l'espace-temps quadridimensionnel.

Le principe d'équivalence est l'objet de nombreux tests expérimentaux et aucune déviation par rapport à celui-ci n'a jusqu'à maintenant été mise en évidence. S'il s'avérait, dans le futur, remis en cause, qu'advierait-il ? La réponse à cette question n'est pas simple et dépend de la manière dont on comprend la théorie. Du point de vue géométrique, il est au cœur de l'approche d'Einstein. Au contraire, on peut aussi le voir comme un outil purement heuristique ayant permis la construction d'une théorie relativiste de la gravitation. Dans le langage de la théorie des champs, le principe d'équivalence stipule que les interactions gravitationnelles sont entièrement décrites par un couplage universel de la matière (leptons, quarks, champ de jauge et champ de Higgs) au tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ qui doit remplacer dans le lagrangien de matière usuel le tenseur $\eta_{\mu\nu}$. C'est équivalent à demander que le seul champ à longue portée médiant la gravitation soit un champ sans masse de spin 2. En ces termes, le principe d'équivalence n'est pas fondamental et une violation de celui-ci (par l'introduction de nouveaux champs, en particulier scalaires, comme le prévoit par exemple la théorie des cordes) serait simplement une généralisation de la théorie d'Einstein.

3.2 COURBURE SPATIALE

3.2.1 Propriétés intuitives, géodésiques

Commençons par considérer des surfaces bidimensionnelles (ou 2-surfaces), qui présentent l'attrait immédiat de pouvoir être plongées dans l'espace tri-dimensionnel usuel et dont la courbure peut donc être intuitivement appréhendée. Le point clef de l'approche – historiquement développé par Gauss – consiste à bien comprendre que des « habitants » d'une surface courbe peuvent en mesurer la courbure sans avoir à s'extraire de cette surface. Des mesures confinées à l'intérieur d'un espace permettent effectivement de déterminer la courbure de cet espace. L'information géométrique est contenue dans le théorème de Pythagore dont la signification fondamentale est de lier les variations de coordonnées à la distance parcourue. Comme nous l'avons souligné au chapitre 1, la généralisation de ce théorème se nomme équation métrique : elle permet de connaître ds à partir des différentielles des coordonnées. Les lignes droites (au sens usuel et banal du terme) ne peuvent généralement pas être tracées sur une surface courbe : ce sont les géodésiques qui, en quelque sorte, les « remplacent » en étant, par définition, les lignes « les plus droites possibles » qu'on peut tracer entre deux points sur un espace courbe.

Bien qu'un cylindre et une sphère paraissent tous les deux courbes, il existe une différence fondamentale : un cylindre peut être déroulé pour être déposé sur un plan, pas une sphère. Les planisphères terrestres montrent bien que certaines régions sont étirées et d'autres contractées. À la surface du cylindre, quand on trace la ligne la plus courte entre deux points et qu'on le déroule ensuite, on obtient une droite. Le cylindre est dit *intrinsèquement plat* (quoi que non plan) et la sphère *intrinsèquement courbe*.

Si on pave une feuille avec des coordonnées cartésiennes et qu'on la roule pour faire un cylindre, on a toujours $s^2 = x^2 + y^2$. En revanche, il existe des difficultés insurmontables si l'on essaie de paver une sphère avec des coordonnées cartésiennes. Ce qui n'empêche que *localement*, pour des régions suffisamment petites, on peut utiliser les coordonnées cartésiennes : $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Pour couvrir toute la Terre, on peut utiliser les coordonnées sphériques avec les angles θ pour la latitude (de 0 à 180°) et φ pour la longitude (de -180° à 180°). Localement, entre deux points (θ, φ) et $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$, la distance est donnée par l'équation métrique $ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ qui n'est, en l'occurrence, que l'expression d'un élément de longueur en coordonnées sphériques pour $r = \text{cte}$. L'équation métrique est une propriété essentielle de la surface. Si on veut reconstruire la géométrie de la Terre à partir des données d'une table contenant les noms des villes et leurs coordonnées θ et φ , il faut aussi la métrique. Si on représente les villes avec des coordonnées cartésiennes, en ignorant l'information métrique qui lie les variations de coordonnées aux distances séparant les points, cela ne ressemblera pas du tout à la Terre !

Tout ceci reste vrai pour les espaces de dimensionnalité plus élevée et de type quelconque. Il faut alors :

- des coordonnées adaptées, dites gaussiennes ;
- une équation qui donne les distances associées aux variations de coordonnées gaussiennes.

Les espaces de Riemann sont les espaces pour lesquels la métrique est quadratique par rapport aux variations de coordonnées et sont donc, compte tenu de la limite minkowskienne, considérés comme les espaces physiques.

Nous choisissons délibérément de présenter les aspects mathématiques de manière très évasive de façon à focaliser la lecture sur les concepts et les idées fondamentales. De manière un peu plus précise (quoique encore approximative), on peut considérer que la géométrie riemannienne a pour enjeu l'étude des variétés différentielles (ce que les Anglo-Saxons, nomment du mot moins intimidant, de *manifold*) munie d'une métrique riemannienne. Une telle métrique est une forme quadratique définie positive. Les variétés sont, quant à elles, des ensembles qui « ressemblent localement » à $\mathbb{R}^n$. Plus exactement, une variété de dimension n est un espace topologique $\mathcal{E}$ tel qu'en chacun de ses points on peut définir un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On rappelle qu'un homéomorphisme

est une bijection continue dont la réciproque est également continue et qu'un espace topologique est un ensemble X muni d'une collection de sous-ensembles τ tel que l'ensemble vide et X soient dans τ , l'union de toute collection d'ensembles de τ est dans τ et l'intersection d'une collection finie d'ensembles de τ est dans τ . Intuitivement, les espaces topologiques sont les structures mathématiques qui permettent de définir les concepts de convergence, continuité, contiguïté, etc. Sur toute partie suffisamment petite d'une variété, on peut donc étiqueter les points par n nombres. On appelle système de coordonnées (ou carte) sur une partie ouverte d'une variété tout étiquetage des points de cette partie (c'est-à-dire tout homéomorphisme de la partie dans $\mathbb{R}^n$ qui à chaque point associe un n -uplet de nombres réels). Enfin, on dit qu'une variété est différentielle (on devrait d'ailleurs dire différentiable) si, pour toute intersection non vide de deux cartes $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{U}_j$, l'application $f_i \circ f_j^{-1} : f_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow f_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ est différentiable (cette application va d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vers un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$, la différentiabilité dont il est question est donc usuelle).

Il est toujours possible de décrire une petite région des espaces de Riemann comme étant localement plate. Ceci revient, à 2 dimensions, à penser dans le plan tangent à la surface.

Considérons une 2-surface de Riemann avec la métrique

$$ds^2 = g_{11}dv^2 + 2g_{12}dvdw + g_{22}dw^2 \quad (3.2)$$

où (v, w) sont des coordonnées gaussiennes et g_{ij} sont des fonctions de la position.

Choisissons un point $P(x, y)$ et cherchons si les coordonnées (x, y) peuvent être choisies telles que la métrique soit localement euclidienne.

En considérant les coordonnées v et w initiales comme des fonctions des nouvelles coordonnées x et y , on peut écrire, par définition de la différentielle :

$$dv = A(x, y)dx + B(x, y)dy, \quad (3.3)$$

$$dw = C(x, y)dx + D(x, y)dy, \quad (3.4)$$

avec

$$A = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad C = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad D = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.5)$$

En reportant dans (3.2), on obtient :

$$ds^2 = g_{11}(A^2 dx^2 + 2AB dx dy + B^2 dy^2) \quad (3.6)$$

$$+ 2g_{12}(AC dx^2 + (AD + CB) dx dy + BD dy^2) \\ + g_{22}(C^2 dx^2 + 2CD dx dy + D^2 dy^2), \quad (3.7)$$

soit

$$ds^2 = g'_{11} dx^2 + 2g'_{12} dx dy + g'_{22} dy^2, \quad (3.8)$$

avec

$$g'_{11} = A^2 g_{11} + 2AC g_{12} + C^2 g_{22}, \quad (3.9)$$

$$g'_{12} = AB g_{11} + (AD + CB) g_{12} + CD g_{22}, \quad (3.10)$$

$$g'_{22} = B^2 g_{11} + 2BD g_{12} + D^2 g_{22}. \quad (3.11)$$

Recensons les libertés dont on dispose. Puisque l'on choisit les nouvelles coordonnées à notre guise, les quatre quantités A, B, C, D et leurs dérivées sont des « degrés de liberté » qui nous sont accessibles. Il faut néanmoins prendre garde à ce que, parmi les 8 dérivées (A, B, C et D peuvent être dérivées par rapport à x et à y), seules 6 sont indépendantes (à cause de l'égalité de Schwarz : $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$).

Compte-tenu de ces possibilités, il est bien clair que l'on peut donc *choisir* les nouvelles coordonnées telles que $g'_{11} = g'_{22} = 1, g'_{12} = 0$ (3 conditions pour 4 degrés de liberté) et

$$\frac{\partial g'_{11}}{\partial x} = \frac{\partial g'_{12}}{\partial x} = \frac{\partial g'_{22}}{\partial x} = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial g'_{11}}{\partial y} = \frac{\partial g'_{12}}{\partial y} = \frac{\partial g'_{22}}{\partial y} = 0 \quad (3.13)$$

(6 conditions pour 6 degrés de liberté). Ces conditions définissent une métrique euclidienne. Il est donc bel et bien possible, par un choix opportun de coordonnées, de se ramener *localement* à la forme euclidienne (ou minkowskienne à 4 dimensions, ce que nous montrerons au paragraphe suivant).

Sur une surface courbe, les trajectoires les plus courtes entre deux points ne peuvent être des lignes droites. Les lignes « les plus droites possibles » sont les géodésiques. À la surface de la Terre, par exemple, les « grands cercles » (qui correspondent aux trajectoires suivies par les avions) sont des géodésiques. En revanche, les cercles de latitude n'en sont pas. En effet, le rayon de courbure des « grands cercles » est celui de la Terre, R , tandis que le rayon de courbure d'un cercle de latitude (à la latitude θ) vaut $R \sin(\theta)$. La courbure des cercles de latitude ($1/(R \sin(\theta))$) n'est donc pas minimale, ce ne sont pas des géodésiques. Ceci illustre une propriété importante : toutes les lignes tangentes en un point d'une surface ont la même composante de courbure perpendiculairement à la surface (dans le cas de la sphère c'est $1/R$). Mais une seule n'a *que* cette composante de courbure : c'est la géodésique. Intuitivement, les géodésiques présentent donc la courbure « minimale », celle associée à la surface elle-même.

3.2.2 Mesurer la courbure

Il est essentiel de se convaincre que les propriétés de courbure d'une surface peuvent être déterminées sans s'extraire de celle-ci. On peut mentionner trois « approches » pour mesurer la courbure d'une surface en demeurant sur elle.

D'abord, en fixant une corde de longueur r en un point O et en décrivant un circuit circulaire avec la corde tendue. On mesure la circonférence :

$$\begin{aligned} C &= 2\pi r && \text{si la surface est plate;} \\ C &< 2\pi r && \text{si la courbure est positive;} \\ C &> 2\pi r && \text{si la courbure est négative.} \end{aligned}$$

Le signe de $2\pi r - C$ fixe donc le signe de la courbure. Considérons le cas d'une sphère de rayon R . L'angle sous-tendu par la corde est $\theta = r/R$. La circonférence du cercle décrit est donc

$$C = 2\pi R \sin \theta \approx 2\pi R \left(\frac{r}{R} - \frac{r^3}{6R^3} \right) \approx 2\pi r \left(1 - \frac{r^2}{6R^2} \right). \quad (3.14)$$

Ce qui conduit à

$$C - 2\pi r \approx -\frac{\pi}{3} \frac{r^3}{R^2}, \quad (3.15)$$

soit

$$R^{-2} = \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi r - C}{r^3} \right). \quad (3.16)$$

Il est ainsi manifestement possible de mesurer la courbure d'une sphère en restant sur celle-ci. En fait, cette méthode donne accès à la courbure K de n'importe quelle 2-surface. Dans le cas de la sphère, K est constante égale à $1/R^2$. La manière la plus simple d'appréhender la courbure (dit gaussienne) d'une 2-surface quelconque en un point P donné consiste sans doute à la définir comme le produit des courbures principales K_a et K_b qui représentent simplement les courbures maximales et minimales en P . On retrouve ici le résultat précédemment énoncé : la courbure gaussienne d'un cylindre est nulle puisque l'une des courbures principales (suivant l'axe du cylindre) est effectivement nulle.

Ensuite, on peut considérer le transport parallèle. En physique, on s'intéresse souvent à des vecteurs locaux (vitesse, force subie par un électron dans un champ électrique variable, etc.). En espace plat, il est simple de comparer différents vecteurs $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ à différentes positions P_1 et P_2 . On prend $\mathbf{V}_1$ et on le transporte en P_2 sans changer sa longueur ni sa direction. La démarche n'est pas si simple en espace courbe car on ne peut plus utiliser un unique système cartésien pour tout l'espace. Considérons à nouveau l'exemple de la sphère. On part du pôle Nord avec $\mathbf{V}_1$ dirigé vers Paris. On effectue des petits pas infinitésimaux le long d'un méridien suivant lequel

on transporte le vecteur parallèlement à lui-même à chaque étape. Une fois arrivé à l'équateur, on le transporte parallèlement à lui-même, par exemple vers l'est. Puis on remonte vers le pôle, toujours parallèlement, suivant le nouveau méridien. Nous sommes revenu, au point de départ en ayant effectué uniquement des transports parallèles et, pourtant, le vecteur a tourné ! Il ne pointe plus maintenant vers Paris mais vers Moscou. On peut facilement vérifier qu'à la surface d'un cylindre (qui est intrinsèquement plate), un vecteur transporté parallèlement ne tourne pas. On peut montrer que la rotation d'un vecteur local transporté parallèlement le long d'une courbe fermée est donnée par

$$\varphi = K \cdot A, \quad (3.17)$$

où A est l'aire embrassée par la courbe. Le résultat d'un transport parallèle en espace courbe dépend donc du chemin suivi.

Enfin, la courbure apparaît également dans l'accélération de la séparation géodésique. Si l'on considère deux méridiens à la surface de la Terre, il est clair que leur écart relatif η ne varie pas linéairement avec la distance s parcourue depuis le pôle (à la différence de ce qui adviendrait en espace plat). Il est élémentaire de vérifier que

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} = -\frac{\eta}{R^2}, \quad (3.18)$$

ce qui se généralise à

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} = -\eta K. \quad (3.19)$$

Bien que peu conclusive en l'état, cette écriture est importante car elle sera mise en lumière par l'interprétation physique du tenseur de Riemann. L'accélération de l'écart relatif s'exprime en fonction de la courbure.

3.3 COURBURE SPATIOTEMPORELLE

Les subtilités du passage à quatre dimensions apparaîtront ultérieurement, avec l'introduction du tenseur de Riemann. Nous souhaitons ici montrer comment, dans un espace-temps quadridimensionnel, il est possible, partant d'une métrique $g_{\mu\nu}$ de la simplifier en une métrique $g'_{\mu\nu}$ par changement de coordonnées (le « prime » ne dénote pas une dérivation mais une écriture avec d'autres coordonnées). C'est la généralisation de l'exemple donné précédemment à deux dimensions.

Soit un point x au voisinage de x_0 . On peut écrire le développement limité de la métrique à l'ordre 2 :

$$g'_{\mu\nu}(x) \approx g'_{\mu\nu}(x_0) + g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau) + \frac{1}{2}g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau)(x^\sigma - x_0^\sigma), \quad (3.20)$$

où la notation $g'_{\mu\nu,\tau}$ signifie $\partial g'_{\mu\nu}/\partial x^\tau$ et $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}$ signifie $\partial^2 g'_{\mu\nu}/(\partial x^\tau \partial x^\sigma)$. On reconnaît ici un simple développement de Taylor où il faut tenir compte que la fonction dépend de 4 variables : les indices répétés (τ dans le deuxième terme et τ, σ dans le troisième terme) assurent une sommation sur les 4 « directions » d'espace-temps. Cette formule montre la *structure* de la métrique. Elle permet de dénombrer les entités fixant sa forme :

- à l'ordre 0, il y a 10 composantes $g'_{\mu\nu}(x_0)$. On rappelle que la métrique est symétrique ($dx^\mu dx^\nu = dx^\nu dx^\mu$) et qu'elle ne possède donc que 10 composantes indépendantes sur les 16 ;
- à l'ordre 1, il y a 40 composantes $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$, correspondant aux 4 valeurs possibles de τ pour chacune des 10 composante $g'_{\mu\nu}(x_0)$;
- à l'ordre 2, il y a 100 composantes $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)$. On peut s'en convaincre de la manière suivante : il y a dix quantités $g'_{\mu\nu}(x_0)$ et, pour chacune d'elle, on peut composer $4 + C_4^2 = 10$ dérivées secondes. Le 4 correspond aux choix où l'on prend les deux indices de dérivation indentiques et le C_4^2 correspond au nombre de manières de prendre deux indices différents parmi les 4. Cette manière d'écrire les choses permet de ne pas compter deux fois les termes du type $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}$ et $g'_{\mu\nu,\sigma\tau}$ qui sont identiques d'après l'égalité de Schwarz.

Reste maintenant à dénombrer les libertés dont nous jouissons lors d'un changement de variables pour amener la métrique à une forme souhaitée. Pour ce faire, il faut écrire la loi de transformation de la métrique $g_{\mu\nu}$ (dans les anciennes coordonnées) à la métrique $g'_{\alpha\beta}$ (dans les nouvelles coordonnées) :

$$g'_{\mu\nu}(x_0) = \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \right]_{x_0}. \quad (3.21)$$

Les raisons précises de cette écriture seront données au chapitre suivant mais on y reconnaît naturellement la loi générale de transformation d'un tenseur de rang 2. Étant maîtres du changement de coordonnées, nous pouvons choisir comme bon nous semble les 16 quantités du type $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}$. Ces 16 degrés de liberté sont plus que suffisants pour donner la forme désirée aux 10 quantités qui spécifient la métrique à l'ordre 0. On peut même noter que les 6 degrés de liberté supplémentaires correspondent en fait aux transformations de Lorentz et aux rotations.

On peut maintenant dériver la relation (3.21) :

$$g'_{\mu\nu,\tau}(x_0) = \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu,\tau} \right]_{x_0} + 2 \left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \right]_{x_0}. \quad (3.22)$$

Le facteur 2 vient des indices jouant des rôle symétriques. Combien y a-t-il de quantités $\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau} \right]_{x_0}$? Il y a 4 choix pour l'indice au numérateur et $4 + C_4^2$ choix pour les

indices de dérivation au dénominateur (pour les mêmes raisons que précédemment). Il y a donc $4 \times (4 + C_4^2) = 40$ degrés de liberté de ce type. Ils permettent de conférer une forme arbitraire aux 40 composantes d'ordre 1.

On peut maintenant dériver la relation (3.22) :

$$g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0) = \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu,\tau\sigma} \right]_{x_0} + 2 \left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau \partial x'^\sigma} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \right]_{x_0} + \text{autres termes de même structure.} \quad (3.23)$$

Reste donc à dénombrer les quantités $\left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau \partial x'^\sigma} \right]_{x_0}$. Il y en a $4 \times (4 + 4 \times 3 + C_4^3) = 80$. Le premier 4 a la même origine que dans le cas précédent et correspond aux choix d'indices du numérateur. Il reste ensuite : 4 possibilités pour le cas où l'on prend 3 indices de dérivation identiques, 4×3 possibilités pour le cas où deux sont identiques et C_4^3 possibilités pour le cas où ils sont tous différents.

C'est ici que se révèle le point fondamental : ces 80 degrés de liberté ne permettent *pas* de conférer une forme arbitrairement choisie aux 100 dérivées secondes de la métrique.

Il est donc possible, *via* un changement de coordonnées adéquat, de transformer les quantités $g_{\mu\nu}$ d'une métrique quelconque en des valeurs particulières choisies arbitrairement. Il est également possible d'amener les dérivées de la métrique initiale à des valeurs choisies arbitrairement. Mais il n'est pas possible d'amener les dérivées secondes à des valeurs choisies arbitrairement. Pratiquement, cela signifie qu'on peut amener une métrique $g_{\mu\nu}$ à la forme minkowskienne $\eta_{\mu\nu}$, qu'on peut annuler ses dérivées, mais qu'on *ne peut pas* annuler ses dérivées secondes. C'est, précisément, la manifestation de la courbure.

Exercices

3.1 Géométrie sur la sphère

Considérons une sphère de rayon R et localisons chaque point de cette sphère par ses angles zénithal et azimutal (θ, φ) . La métrique est alors :

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

1. Explicitez le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ ainsi que l'inverse, $g^{\mu\nu}$.
2. Proposons le changement de coordonnées suivant : $(\theta, \varphi) \rightarrow (\rho, \Theta)$ avec $\rho = R \sin \theta$ et $\Theta = \varphi$.

(a) Calculez le tenseur métrique dans ce nouveau système de coordonnées.

- (b) En «immergeant» la sphère dans un espace tri-dimensionnel, proposez une description de la nouvelle coordonnée ρ . (Un dessin peut s'avérer utile.)
- (c) Considérons un cercle situé en $\rho = \rho_0$ avec $\rho_0 \ll R$. Calculez la circonférence de ce cercle ainsi que son rayon mesuré (*i.e.* distance au centre). Qu'en déduisez-vous quant à la courbure de la sphère ?

3.2 Exemple d'espace courbe tri-dimensionnel

Considérons l'espace tri-dimensionnel :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\tilde{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2,$$

avec $k = -1, 0$ ou $+1$. (Il s'agit de la section spatiale des espaces-temps usuellement utilisés pour décrire notre Univers dans son ensemble.)

1. Explicitez le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ ainsi que $g^{\mu\nu}$.
2. Proposez une analogie entre les coordonnées ci-dessus et celles utilisées dans l'exercice 3.1. Pour le cas $k = 1$, proposez un changement de coordonnées $\chi = f(r)$ tel que χ soit l'analogue de la coordonnée θ dans l'exercice 3.1.
3. En vous inspirant de la technique du cercle utilisée pour la sphère, proposez et appliquez une méthode pour déterminer la courbure de l'espace tri-dimensionnel ci-dessus (cette dernière pouvant être fonction de k).

3.3 Effect « Doppler » gravitationnel

Considérons un espace-temps quelconque tel que :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Nous imposons à cet espace-temps d'être statique : le tenseur métrique ne dépend pas de la coordonnée « temps », $g_{\mu\nu} = f(x^1, x^2, x^3)$. Soient deux horloges A et B *identiques*, immobiles spatialement et respectivement fixées en $x^i = X_A^i$ et $x^i = X_B^i$. D'un point de vue spatial, l'horloge A est en $(x^1, x^2, x^3) = (0, 0, 0)$ tandis que l'horloge B est en $(x^1, x^2, x^3) = (\Delta x, 0, 0)$. Ces horloges « mesurent » le temps de façon identique (elles sont rythmées par le même processus physique) : leur rythme est donné par un pendule de période *propre* $\Delta\tau_{\text{pendule}}$.

1. Quelle est l'expression de dx^0 en fonction du temps propre de chaque horloge ?

On suppose que l'horloge A émet des photons en direction de l'horloge B (les photons se déplacent donc suivant x^1) à intervalles de temps propre régulier : $\Delta\tau_{\text{émission}}^A = \Delta\tau_{\text{pendule}}$. On rappelle que la propagation d'un photon se traduit par $ds^2 = 0$ et, pour simplifier les calculs, nous supposons le tenseur métrique diagonal.

2. Donnez $\Delta x_{\text{émission}, A}^0$, l'intervalle en x^0 entre l'émission de 2 photons par l'horloge A.
 3. On considère un premier photon émis par A à $x_A^0 = 0$. Quel est l'instant de réception de ce photon par l'horloge B ? (On exprimera le résultat en fonction d'une intégrale sur x^1 .)
 4. Montrez que l'intervalle de temps $\Delta x_{\text{réception}, B}^0$ entre deux réceptions de photons en B est égale à $\Delta x_{\text{émission}, A}^0$.
- On considère que l'horloge B émet elle-aussi des photons à intervalles de temps propre régulier : $\Delta \tau_{\text{émission}}^B = \Delta \tau_{\text{pendule}}$.
5. Donnez $\Delta x_{\text{émission}, B}^0$, l'intervalle en x^0 entre l'émission de 2 photons par l'horloge B.
 6. Donnez le rapport entre l'intervalle de temps de réception par B des photons émis par A, divisé par l'intervalle de temps d'émission des photons émis par B.
 7. Comment interpréteriez-vous la fréquence d'émission des photons par l'horloge B ainsi que la fréquence de réception en B des photons émis par l'horloge A ?
 8. On suppose $g_{00}(X_A^i) > g_{00}(X_B^i)$. La fréquence de réception des photons en B est-elle plus grande ou plus faible que celle d'émission (toujours en B) ?

Corrigés

3.1

1. En adoptant une écriture matricielle, on trouve :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

La quantité $g^{\mu\nu}$ est définie comme l'inverse du tenseur métrique, i.e. $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$.
On trouve :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^{-2} & 0 \\ 0 & R^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}.$$

2. (a) En appliquant la loi de transformation des tenseurs, on obtient

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{\rho^2}{R^2})^{-1} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}.$$

- (b) On peut munir l'espace tri-dimensionnel du système de coordonnées cylindrique : (ρ, φ, z) où z est la coordonnée suivant l'axe $\mathbf{e}_z$ tandis que (ρ, φ) sont les coordonnées polaires dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. La coordonnée ρ proposée en question (2.a) coïncide avec la coordonnée ρ du système polaire pour $r = R$. (On notera toutefois qu'à l'aide de ρ on ne peut *a priori* couvrir qu'un des deux hémisphères.) Ainsi, la coordonnée θ donne une mesure directe des distances sur la sphère tandis que la coordonnée ρ donne elle une mesure directe (à un facteur 2π près) de la circonférence des cercles tracés sur une sphère.
- (c) Le long d'un cercle, la coordonnée ρ ne varie pas. Son périmètre, génériquement défini comme l'intégrale le long du cercle de ds , s'écrit

$$C = \int_{\text{cercle}} ds = \int_0^{2\pi} \rho_0 d\Theta = 2\pi\rho_0.$$

Le long du « rayon » de ce cercle, la coordonnée Θ ne varie pas. On a donc :

$$r = \int_{\text{rayon}} ds = \int_0^{\rho_0} \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}} \approx \rho_0 \left(1 + \frac{\rho_0^2}{6R^2} \right).$$

En comparant C à $2\pi r$, on trouve que $C < 2\pi r$: la sphère possède une courbure positive.

3.2

1. On trouve

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 - kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \tilde{\theta} \end{pmatrix}$$

et

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - kr^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \tilde{\theta} \end{pmatrix}.$$

2. On notera que r est analogue à ρ . Le couple $(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ décrit la partie angulaire (ici un angle solide) de la métrique, et il peut être vu comme analogue à Θ . Ainsi, r est une mesure directe (à un facteur 2π près) de la circonférence d'un cercle. Pour $k = 1$, on pourra choisir $r = \sin \chi$ pour ainsi trouver $ds^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2)$. χ est alors l'équivalent de la coordonnée θ et donne une mesure directe des distances radiales.
3. On peut par exemple prendre un cercle aux coordonnées $r = r_0$, $\theta = \pi/2$ puis comparer sa circonférence à $2\pi \times \text{rayon}$. On peut aussi considérer l'ensemble des

points situés à $r = r_0$ (avec $r_0 \ll 1$ pour effectuer des développements limités et simplifier les calculs). Il s'agit d'une « sphère » de surface :

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r_0^2 \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} = 4\pi r_0^2,$$

et de « rayon »

$$L = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = r_0 \left(1 + k \frac{r_0^2}{6} \right).$$

En comparant S à $4\pi L^2$, on obtient :

- $k = 1$: $S < 4\pi L^2$ et l'espace est à courbure positive ;
- $k = 0$: $S = 4\pi L^2$ et l'espace est à courbure nulle ;
- $k = -1$: $S > 4\pi L^2$ et l'espace est à courbure négative.

3.3

1. Le temps propre est donné par l'intervalle, *i.e.* $d\tau = ds$. Pour une horloge spatialement fixe, seul $dx^0 \neq 0$. On a donc :

$$dx^0(X_A^i) = \frac{d\tau_A}{\sqrt{g_{00}(X_A^i)}}$$

et

$$dx^0(X_B^i) = \frac{d\tau_B}{\sqrt{g_{00}(X_B^i)}}.$$

2. Puisque l'intervalle d'émission est donné par $\Delta\tau_{\text{émission}, A} = \Delta\tau_{\text{pendule}}$, on trouve

$$\Delta x_{\text{émission}, A}^0 = \frac{\Delta\tau_{\text{pendule}}}{\sqrt{g_{00}(X_A^i)}}.$$

3. On suppose un premier photon émis à $x_I^0 = 0$. Puisque pour un photon $ds^2 = 0$ et comme la métrique est diagonale et que le photon se déplace suivant x^1 , on obtient pour le temps de réception x_F^0 :

$$x_F^0 = \int_0^{\Delta x} \sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}} dx^1.$$

4. On considère un deuxième photon émis au temps $x_{II}^0 = x_I^0 + \Delta x_{\text{émission}, A}^0$. On trouve alors que son temps de réception est

$$x_{FF}^0 = \Delta x_{\text{émission}, A}^0 + \int_0^{\Delta x} \sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}} dx^1.$$

Or, la métrique ne dépend pas de x^0 et les intégrales, suivant x^1 , sont identiques quel que soit le temps d'émission. Ainsi,

$$\Delta x_{\text{réception}, B}^0 = x_{FF}^0 - x_F^0 = \Delta x_{\text{émission}, A}^0.$$

5. De même que pour l'horloge A , on trouve

$$\Delta x_{\text{émission}, B}^0 = \frac{\Delta \tau_{\text{pendule}}}{\sqrt{g_{00}(X_B^i)}}.$$

6. On a, d'une part,

$$\Delta x_{\text{réception}, B}^0 = \Delta x_{\text{émission}, A}^0 = \frac{\Delta \tau_{\text{pendule}}}{\sqrt{g_{00}(X_A^i)}}.$$

D'autre part,

$$\Delta x_{\text{émission}, B}^0 = \frac{\Delta \tau_{\text{pendule}}}{\sqrt{g_{00}(X_B^i)}}.$$

On trouve donc

$$\frac{\Delta x_{\text{réception}, B}^0}{\Delta x_{\text{émission}, B}^0} = \sqrt{\frac{g_{00}(X_B^i)}{g_{00}(X_A^i)}}.$$

7. La fréquence d'émission des photons en B donne une mesure de l'écoulement du temps en B . La fréquence de réception en B des photons émis en A donne la perception depuis le point B de l'écoulement du temps en A .

8. On appelle $f_A = 1/\Delta x_{\text{réception}, B}^0$ et $f_{\text{émission}, B} = 1/\Delta x_{\text{émission}, B}^0$. On trouve donc :

$$f_A = \sqrt{\frac{g_{00}(X_B^i)}{g_{00}(X_A^i)}} f_B.$$

Si $g_{00}(X_A^i) > g_{00}(X_B^i)$, on a alors $f_A > f_B$. Autrement dit, la fréquence d'un photon rouge initialement émis loin d'un corps massif, apparaîtra bleue pour un observateur proche de ce corps.

PREMIER ASPECT DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE : LA PHYSIQUE EN ESPACE COURBE

4

INTRODUCTION

Ce chapitre entend établir les bases de la théorie d'Einstein. La question que nous posons ici est : puisque la gravitation doit être pensée comme une courbure de l'espace-temps, comment la physique connue s'écrit-elle en présence de courbure ? Pour y répondre, nous introduisons le concept de dérivée covariante et montrons le théorème fondamental de la géométrie riemannienne.

4.1 ÉLÉMENTS D'ANALYSE TENSORIELLE

Nous ne cherchons *pas* à donner ici une introduction méthodique et systématique au calcul tensoriel. Nous préférons aborder les difficultés et subtilités lorsqu'elles se présenteront. Il ne s'agit, dans un premier temps, que de fixer quelques jalons qui servent de guide à l'intuition.

4.1.1 Le minimum vital

Comme nous l'avons vu, la transition d'un espace plat à un espace courbe implique que l'on ne sera pas toujours en mesure d'utiliser des coordonnées cartésiennes. Il pourra même être nécessaire de recourir à des coordonnées très complexes. Il est donc bien clair qu'il est indispensable de parvenir à écrire des équations qui sont invariantes par changement de coordonnées, c'est-à-dire qui demeurent valides dans tous les systèmes de coordonnées si elles le sont dans au moins un. C'est pourquoi les tenseurs sont des objets fondamentaux : les équations entre tenseurs restent valides par changement de coordonnées gaussiennes. Les lois physiques écrites tensoriellement gardent donc leur forme par changement de coordonnées. Et ce n'est pas un détail puisque, justement, les changements de coordonnées jouent un rôle central en relativité générale.

Conceptuellement, les tenseurs ne sont pas des objets compliqués. Ils sont juste les objets ayant les « bonnes » propriétés de transformation. Si l'on considère la transformation $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$, un objet $S^{\mu\nu\rho}$ est un tenseur de rang 3 s'il se transforme de la manière suivante :

$$S^{\mu'\nu'\rho'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\rho} S^{\mu\nu\rho}. \quad (4.1)$$

C'est exactement ce qui avait été énoncé dans le cadre de la relativité restreinte. Dans ce cas, on reconnaissait le produit de 3 transformations de Lorentz. Un tenseur de rang n était alors un objet se transformant comme le produit de n transformations de Lorentz. L'équation (4.1) demeure valide mais ici les termes $\partial x^{\mu'}/\partial x^\mu$ ne représentent plus nécessairement une transformation de Lorentz. Il peut s'agir d'une transformation plus générale. Il est fondamental de bien comprendre que le concept de tenseur est dépendant du contexte. Il « suit » les lois de transformation, c'est le point nodal. Mais ces lois ne sont pas nécessairement du même type suivant les circonstances considérées. Les scalaires et les vecteurs sont les formes les plus simples de tenseurs (rangs 0 et 1). Ils nous sont familiers depuis longtemps et l'on sait effectivement qu'une équation entre scalaires (de même qu'une équation entre vecteurs) demeure invariante par changement de référentiel d'inertie. Il s'agit juste de généraliser cette notion.

Comme on le verra par la suite, il est intéressant d'introduire deux sortes de coordonnées : les coordonnées dites contravariantes (correspondant aux indices hauts) et les coordonnées dites covariantes (correspondant aux indices bas). La formule (4.1) se généralise alors ainsi : $S^\mu_{\nu\rho}$ (avec μ contravariante et ν, ρ covariantes) est un tenseur si :

$$S^{\mu'}_{\nu'\rho'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}} S^\mu_{\nu\rho}. \quad (4.2)$$

De manière à rendre le lecteur familier avec différents types de notations rencontrées dans la littérature, nous décidons à dessein de mettre les « primes » parfois sur les indices et parfois sur les objets eux-mêmes. Physiquement ces deux notations représentent évidemment la même chose. Au niveau du vocabulaire, on comprend pourquoi on parle de covariance (ou de contravariance, peu importe) pour les *objets* et d'invariance pour les *lois*. En effet, les tenseurs ne sont pas invariants par changement de coordonnées. Mais les lois qui les font intervenir le sont effectivement puisque tous les tenseurs se transforment de la même façon.

À ce niveau, on peut déjà sentir l'idée permettant d'écrire une loi compatible avec la relativité générale : il suffit de prendre une loi valable en relativité restreinte. Cette loi est alors valable dans un référentiel en chute libre, et son écriture sous forme tensorielle demeure automatiquement valide sous l'effet des transformations générales. La loi générique s'obtient en appliquant un changement quelconque du système de

coordonnées à la formulation tensorielle de la loi écrite dans le référentiel en chute libre.

La spécificité de la gravitation apparaît immédiatement. La procédure juste mentionnée ne fonctionne plus pour la gravité car la loi de Newton n'est *pas* compatible avec la relativité restreinte ! Le point de départ « usuel » (prendre la loi compatible avec la relativité restreinte et la rendre adaptée à la relativité générale en explicitant sa covariance) n'existe pas pour la gravité. C'est la raison pour laquelle un traitement très spécifique doit lui être réservé (approche qui, pourtant, conduit *in fine* à une vision globale extrêmement cohérente et dépassant largement la seule problématique gravitationnelle).

Les transformations générales en espace-temps courbe sont non linéaires. Soit un jeu de coordonnées gaussiennes qui couvrent l'espace-temps x^μ et un autre jeu x'^μ .

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \\ x^\mu &= x^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3). \end{aligned}$$

Ces fonctions pouvant être fort compliquées, il est légitime de commencer en considérant les différentielles (qui sont linéaires par définition) :

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (4.3)$$

On peut définir les tenseurs Λ par

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad \text{et} \quad \Lambda_\mu{}^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu}. \quad (4.4)$$

En générale $\Lambda^\mu{}_\nu \neq \Lambda_\mu{}^\nu$. Le produit s'écrit :

$$\Lambda^\alpha{}_\nu \Lambda_\beta{}^\nu = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad (4.5)$$

où δ_β^α est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $\alpha = \beta$ et 0 sinon.

Un vecteur local peut être décomposé sur des vecteurs de base $\mathbf{e}_\mu$ au point d'espace-temps P . L'indice μ signifie que $\mathbf{e}_\mu$ pointe dans la direction μ . Soit P' un point se trouvant à une distance infinitésimale dx^μ de P . On peut écrire $\mathbf{PP}' = dx^\mu \mathbf{e}_\mu$. La distance invariante est alors donnée par

$$ds^2 = \|\mathbf{PP}'\|^2 = (dx^\mu \mathbf{e}_\mu)(dx^\nu \mathbf{e}_\nu) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu dx^\mu dx^\nu. \quad (4.6)$$

Dans l'espace-temps minkowskien avec des coordonnées orthogonales, on a $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$. Ce qui se généralise à : $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu}$.

Les composantes d'impulsion (ou de n'importe quel autre quadrivecteur) doivent se transformer par une transformation générale comme les composantes dx^μ :

$$p'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} p^\nu. \quad (4.7)$$

Dans un référentiel en chute libre où la relativité restreinte s'applique, on peut écrire que le « carré » de l'impulsion (*i.e.* ici de la quadri-impulsion) est égale au carré de la masse ($E^2 = p^2 + m^2$) :

$$m^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu. \quad (4.8)$$

L'expression de l'intervalle est donnée par :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.9)$$

Il est naturellement invariant sous l'effet de transformations générales et s'écrit dans les nouvelles coordonnées :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.10)$$

Toutes les composantes des vecteurs se transformant de la même façon, on peut maintenant écrire :

$$m^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu. \quad (4.11)$$

4.1.2 Vecteurs et covecteurs

Jusqu'à présent, on a essentiellement considéré des composantes de vecteurs qui se transforment comme $dx^0 = dt$, $dx^1 = dx$, $dx^2 = dy$, $dx^3 = dz$. Mais, comme on l'a laissé entendre avec la formule (4.2), on peut construire d'autres composantes.

Considérons par exemple une force conservative en mécanique classique :

$$f_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad (4.12)$$

où φ est un potentiel scalaire, invariant par transformation. C'est l'écriture « en coordonnées » de $\mathbf{f} = -\mathbf{grad}\varphi$.

L'effet d'une transformation sur $\mathbf{f}$ est :

$$f'_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} f_j. \quad (4.13)$$

Il est important de bien se convaincre que cette écriture (en particulier le deuxième signe « = ») est *rigoureuse*. Il ne s'agit pas d'une « approximation de physicien » consistant à « multiplier en haut et en bas » par ∂x^j , ce qui n'aurait pas de sens. Il s'agit simplement d'une reparamétrisation, écrite comme il se doit. Le point important ici est de remarquer que c'est l'inverse de la transformation qui a été vue

précédemment pour les coordonnées dx^i . Les composantes qui se transforment ainsi (comme $1/dx^i$) sont appelées *covariantes*, l'indice est en bas. Les autres composantes (se transformant comme dx^i) sont nommées *contravariantes*. On peut exprimer n'importe quel vecteur avec les composantes que l'on veut suivant la signification physique à faire ressortir. Les composantes contravariantes sont « de type » vecteur tangent $\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)$ et les composantes covariantes « de type » vecteur gradient.

L'intervalle PP' défini précédemment s'écrit

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.14)$$

Appelons-le, pour le moment de façon purement conventionnelle,

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu. \quad (4.15)$$

On peut alors écrire :

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu. \quad (4.16)$$

Étant donné que l'intervalle est invariant, il s'écrit également :

$$ds^2 = dx'_\alpha dx'^\alpha = dx'_\alpha \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (4.17)$$

en utilisant la loi de transformation des coordonnées. En comparant les deux dernières équations, on obtient :

$$dx_\mu = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} dx'_\alpha. \quad (4.18)$$

Ce qui s'écrit encore :

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx_\mu. \quad (4.19)$$

Cette dernière équation montre bien que les dx_μ (indice en bas) sont donc les composantes covariantes de PP' . Elles se transforment comme il faut. Le tenseur métrique permet de convertir les indices haut en indices bas (et réciproquement).

Considérons un exemple à deux dimensions pour illustrer la différence de sens entre les coordonnées covariantes et les coordonnées contravariantes. Soit un système de coordonnées non orthogonal d'origine O . Soit un vecteur infinitésimal OP . La composante de OP sur l'axe 1 s'obtient en projetant P parallèlement à l'axe 2, et réciproquement. Soit

$$OP = e_1 dx^1 + e_2 dx^2, \quad (4.20)$$

où dx^1 et dx^2 sont les composantes (contravariantes) du vecteur. Les composantes du covecteur sont données par $dx_\mu = g_{\mu\nu}dx^\nu$. Soit :

$$dx_1 = g_{11}dx^1 + g_{12}dx^2 \quad (4.21)$$

$$= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 dx^1 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 dx^2 \quad (4.22)$$

$$= dx^1 + dx^2 \cos \theta. \quad (4.23)$$

$$\text{et} \quad dx_2 = dx^2 + dx^1 \cos \theta. \quad (4.24)$$

Ce qui montre (il suffit de faire un petit dessin pour le voir immédiatement) que les composantes covariantes correspondent aux projections orthogonales. Dans un système orthogonal cartésien, dans un espace euclidien, la différence entre composantes contravariantes et covariantes s'évanouit. Ce qui explique pourquoi ces concepts sont peu intéressants en physique newtonienne.

Plus généralement, à D dimensions, on obtient la première composante du vecteur en projetant P sur la direction 1 suivant une surface en P qui contient tous les vecteurs de base sauf le vecteur 1. En revanche, pour la première composante du covecteur, il faut procéder à une projection orthogonale.

Il est évidemment possible de définir ces notions de façon plus rigoureuse (c'est d'ailleurs aussi la version la plus « moderne »). Mais tel n'est pas ici notre but. En quelques phrases... à chaque point P de l'espace-temps, on associe l'ensemble des vecteurs possibles, associés à ce point. On appelle cela l'espace tangent en P , T_P . Ce nom est lié à la signification évidente qu'il prend pour un espace bi-dimensionnel à $D = 2$: l'ensemble des vecteurs en un point de cet espace est compris dans le plan tangent au point considéré. T_P forme un espace vectoriel réel. On peut alors définir un autre espace vectoriel, de même dimension, appelé l'espace dual, noté T_P^* . L'espace dual est l'espace de toutes les formes linéaires de l'espace original vers les nombres réels. Autrement dit, si $\omega \in T_P^*$ est un vecteur dual, alors $\omega(a\mathbf{e} + b\mathbf{f}) = a\omega(\mathbf{e}) + b\omega(\mathbf{f}) \in \mathbb{R}$, avec $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ des vecteurs de T_P . Les éléments de T_P sont les vecteurs contravariants et ceux de T_P^* sont les vecteurs covariants. On peut aussi appeler ces derniers des 1-formes.

La dérivée par rapport à une coordonnée covariante conduisant à un objet contravariant, et réciproquement, il est légitime de noter $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ et $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

4.1.3 Quelques règles et définitions

Les tenseurs ne sont donc pas des objets particulièrement compliqués. Ils intègrent simplement de manière centrale la façon dont se *transforment* les objets physiques. Un tenseur ayant n indices contravariants et m indices covariants est appelé tenseur (n, m) . Il peut être contracté en un tenseur de type $(n - 1, m - 1)$ en sommant sur un indice haut et un indice bas. Par exemple $S^\mu = T^\mu_\nu$. La contraction d'un tenseur de rang 2 est sa trace (elle correspond bien à ce que l'on nomme ainsi en calcul

matriciel). Si un tenseur est inchangé par permutation de deux indices, par exemple $S_{\dots\mu\nu\dots} = S_{\dots\nu\mu\dots}$, il est dit symétrique par rapport à ces indices. Si un tenseur change de signe par permutation de deux indices, par exemple $S_{\dots\mu\nu\dots} = -S_{\dots\nu\mu\dots}$, il est dit antisymétrique par rapport à ces indices. À partir d'un tenseur sans symétrie particulière dans ses indices, on peut procéder à une symétrisation ou à une antisymétrisation. La symétrisation se note avec une parenthèse et correspond à :

$$S_{(\mu_1\mu_2\dots\mu_i)} = \frac{1}{i!}(S_{\mu_1\mu_2\dots\mu_i} + \text{somme sur les permutations de } \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i). \quad (4.25)$$

L'antisymétrisation se note avec un crochet et correspond à :

$$S_{[\mu_1\mu_2\dots\mu_i]} = \frac{1}{i!}(S_{\mu_1\mu_2\dots\mu_i} + \text{somme alternée sur les permutations}). \quad (4.26)$$

Évidemment, la métrique est le tenseur le plus important en relativité générale. C'est un tenseur symétrique de rang 2. Comme on l'a montré au chapitre précédent, il est toujours possible de trouver des coordonnées telles qu'en un point donné une métrique $g_{\mu\nu}$ puisse se réécrire sous la forme minkowskienne $\eta_{\mu\nu}$ (les dérivées peuvent également être annulées mais pas les dérivées secondes, c'est une manifestation de la courbure).

Même en espace plat, la métrique peut avoir des dérivées non nulles si le système de coordonnées est non-cartésien. Par exemple, en coordonnées sphériques, l'intervalle s'écrit $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$. On voit bien que la composante g_{22} , généralement notée dans ce cas $g_{\theta\theta}$, présente une dérivée non nulle par rapport à r .

La métrique permet de calculer les produits scalaires : $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = g_{\mu\nu} S^\mu T^\nu = S_\nu T^\nu$. On peut également définir la métrique inverse $g^{\mu\nu}$ telle que $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$.



Tout objet avec n indices n'est pas nécessairement un tenseur de rang n . De la même façon que tout objet sans indice n'est pas nécessairement un scalaire. Comme précédemment mentionné, la masse et la charge sont des scalaires (elles sont les mêmes dans tous les référentiels) mais l'énergie ou la densité volumique de charge ne le sont pas (elles sont les premières composantes de quadrivecteurs, elles varient quand on change de référentiel). Nous verrons ultérieurement l'exemple d'un objet à 3 indices qui n'est *pas* un tenseur de rang 3. On peut néanmoins d'ores et déjà mentionner une autre grandeur non tensorielle intéressante : l'élément de volume quadridimensionnel $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. Il n'est *pas* invariant par changement de coordonnées. C'est la raison pour laquelle il est généralement multiplié par la racine du déterminant du tenseur métrique. Comme nous le montrerons au chapitre 5, cela permet de former un scalaire.

Il est intéressant de noter que si le produit d'un objet $F_{\mu\nu}$ avec n'importe quel tenseur est un tenseur, alors $F_{\mu\nu}$ est lui-même un tenseur.

Montrons-le dans un cas particulier. Soit A^ν un vecteur. Supposons que $F_{\mu\nu} A^\nu = B_\mu$ soit un vecteur. Dans un système de coordonnées « primées », cela s'écrit

$$F'_{\alpha\beta} A'^\beta = B'_\alpha. \quad (4.27)$$

Soit, si l'on réécrit A et B en fonction de leurs expressions dans le système initial compte tenu du fait qu'ils sont des vecteurs :

$$F'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} A^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\alpha} B_\mu. \quad (4.28)$$

Multiplions ceci par $\partial x'^\alpha / \partial x^\mu$ (attention : comme précédemment mentionné, ce n'est pas un « manque de rigueur » de physicien, c'est une reparamétrisation tout à fait rigoureuse si on la regarde de près) :

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} F'_{\alpha\beta} A^\nu = B_\mu. \quad (4.29)$$

Soustrayons à gauche $F_{\mu\nu} A^\nu$ et à droite B_μ (puisque, précisément, $F_{\mu\nu} A^\nu = B_\mu$) :

$$\left(F'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} - F_{\mu\nu} \right) A^\nu = 0. \quad (4.30)$$

Comme ceci doit être vrai $\forall A^\nu$, il s'ensuit :

$$F_{\mu\nu} = F'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (4.31)$$

ce qui est exactement la règle de transformation d'un tenseur de rang 2. $F_{\mu\nu}$ est donc bien un tenseur.

4.2 PREMIÈRE APPROCHE DE LA THÉORIE D'EINSTEIN

4.2.1 Principe de covariance généralisé

On cherche donc des lois physiques qui demeurent valides sous l'action de transformations générales. De plus, dans un référentiel en chute libre, les lois correctes semblent être celles satisfaisant à la relativité restreinte. Enfin, les équations entre tenseurs conservent leur forme lors des transformations générales : les tenseurs ont été construits pour cela. Cela conduit au *principe de covariance généralisé* postulé par Einstein. Il stipule que les lois de la physique peuvent s'exprimer sous la forme

d'équations tensorielles qui se réduisent aux lois en accord avec la relativité restreinte dans un référentiel en chute libre. Une loi valide du point de vue de la relativité restreinte peut être généralisée afin d'être utilisée dans n'importe quel référentiel en accélération si elle est exprimée sous forme tensorielle. C'est une excellente nouvelle dans la mesure où la plupart des lois semblent déjà être exprimées sous forme tensorielle ! Se pourrait-il qu'il n'y ait finalement rien à faire ? Hélas (ou heureusement !) ce n'est pas tout à fait aussi simple : les équations physiques sont des équations dynamiques. Elles font intervenir des dérivées. Or, et c'est le point clef, la dérivée – au sens usuel – d'un tenseur ne forme *pas* un nouveau tenseur. Montrons-le sur l'exemple simple de la dérivée d'un vecteur. Lorsqu'on passe des coordonnées (μ, ν) aux coordonnées (μ', ν') , l'objet $\partial_\mu V^\nu$ se transforme suivant (car ∂_μ et V^ν sont des vecteurs) :

$$\partial_\mu V^\nu \rightarrow \partial_{\mu'} V^{\nu'} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \right) \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu \right) \quad (4.32)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \cdot \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} V^\nu. \quad (4.33)$$

Dans cette dernière expression, il est clair que le premier terme correspond exactement à ce qui est attendu pour la transformation d'un tenseur de rang deux (en l'occurrence avec un indice covariant et un indice contravariant). Mais ce terme n'est pas le seul : le second terme est en trop ! Autrement dit, la dérivée partielle d'un vecteur ne forme *pas* un tenseur puisqu'elle ne se transforme pas comme tel. Il faut donc revoir notre compréhension de la dérivation. Étant donné que toutes les équations physiques, ou presque, font intervenir des dérivées, la tâche n'est, finalement, pas si anodine... Par ailleurs, on voit bien dans la dernière expression que le terme indésirable est associé aux dérivées secondes des coordonnées, celles-là mêmes qui sont nulles en espace euclidien (ce qui explique pourquoi la dérivation usuelle ne pose pas de problème en l'absence de courbure) mais qui, comme on l'a montré, ne peuvent pas être toutes annulées en espace riemannien. Au niveau intuitif, la propriété analytique qui apparaît ici est évidemment à rapprocher de la propriété géométrique soulignée au chapitre 3, à savoir le fait que quand un vecteur est déplacé « parallèlement » à lui-même en espace courbe, il peut avoir tourné par rapport à son positionnement initial quand on revient au point de départ (c'est l'exemple donné à la surface d'une sphère). Cela intervient naturellement dans la problématique de la définition correcte d'une dérivée en espace courbe. Une telle dérivée se nomme « dérivée covariante » : elle vient, en quelque sorte, retrancher le terme excédentaire qui apparaît dans l'équation (4.33).

4.2.2 Dérivation covariante

Considérons l'évolution, en espace courbe, d'un quadrivecteur local de coordonnées A^μ . Comme on l'a vu, il n'est pas possible de paver tout cet espace courbe avec des coordonnées cartésiennes. Ce qui signifie que les coordonnées A^μ vont changer au cours du déplacement (on peut imaginer que A^μ est la quadri-impulsion associée à un mobile ponctuel qui se meut dans l'espace), même en l'absence de tout processus physique. Sur une partie de trajectoire caractérisée par une variation d'abscisse curviligne Δs entre deux points P et P' , on peut écrire la variation δA^μ . Celle-ci est uniquement liée à l'évolution (nécessaire en espace courbe) de la base $\mathbf{e}_\mu(s)$ le long de la trajectoire et n'est pas liée à une évolution intrinsèque au phénomène considéré. Si la variation totale mesurée de la μ -ième composante du quadrivecteur est ΔA^μ , la quantité physiquement pertinente est $\Delta A^\mu - \delta A^\mu$. Cette différence représente la variation totale mesurée à laquelle a été retranchée la partie purement « artéfactuelle » liée à la variation du système de coordonnées et non pas au processus physique lui-même. De façon très analogue à la définition de la dérivée usuelle, mais en tenant compte de cette correction, on va définir la dérivée covariante par :

$$\frac{DA^\mu}{Ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta A^\mu - \delta A^\mu}{\Delta s}. \quad (4.34)$$

Il demeure, bien évidemment, une question centrale : comment faut-il procéder pour transporter le vecteur du point P au point P' – à travers l'espace courbe – de manière à comparer les nouvelles valeurs des composantes du quadrivecteur à leurs valeurs initiales ? En espace euclidien, la réponse est triviale : on déplace le vecteur final parallèlement jusqu'au point initial afin d'effectuer la comparaison. En espace courbe, il suffit de généraliser cette idée. Le principe d'équivalence assure que dans une région suffisamment petite, il est possible d'effectuer une transformation vers un référentiel en chute libre tel que l'espace-temps y soit plat et les coordonnées usuelles de la relativité restreinte utilisables. Ce qui invite à définir une procédure claire de transport d'un vecteur le long d'une trajectoire en espace courbe :

- le vecteur est transformé vers un référentiel en chute libre en P ;
- dans ce référentiel, il est transporté de telle façon que ses coordonnées cartésiennes ne changent pas ;
- enfin le vecteur résultant est rétrotransformé vers le référentiel pertinent en P' .

Sur une trajectoire macroscopique, cette procédure infinitésimale est répétée autant de fois que nécessaire. Cela définit le *transport parallèle* d'un vecteur local en espace-temps courbe.

Supposons que l'on transporte parallèlement A^μ sur une distance Δx^ρ dans la direction ρ . Si le vecteur n'avait initialement qu'une composante suivant σ , il va de

fait développer, en général, des composantes dans les autres directions : δA^μ va s'exprimer à l'aide de toutes les composantes A^σ . Mais le résultat sera proportionnel (puisque'il s'agit d'un déplacement élémentaire) à Δx^ρ . Soit :

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\sigma\rho} A^\sigma \Delta x^\rho, \quad (4.35)$$

où les objets $\Gamma^\mu_{\sigma\rho}$ incluent toute la partie non triviale. On peut voir cette expression comme une définition des $\Gamma^\mu_{\sigma\rho}$, nommés *coefficients de connexion*. Il est important de se convaincre de la légitimité de cette écriture. La contraction (*i.e.* la sommation) sur l'indice σ assure que la variation de la composante A^μ peut bien dépendre de toutes les composantes du quadrivecteur. De même pour la contraction sur ρ qui assure un choix arbitraire de la direction de déplacement. En ce sens, le coefficient de connexion n'est rien d'autre que l'objet à 3 indices (nécessairement trois indices puisqu'il doit présenter les 2 indices à contracter et un indice libre correspondant à la composante étudiée μ) qui permet d'exprimer la variation de A^μ en fonction de la direction et des autres composantes. L'expression (4.35) n'a donc rien de mystérieux (le signe « - » est purement conventionnel).

Il est essentiel de noter que les coefficients de connexion ne sont *pas* des tenseurs de rang 3 (ni d'aucun autre rang évidemment). Comme expliqué précédemment, il ne suffit pas d'avoir n indices pour être un tenseur de rang n et les coefficients de connexion constituent un exemple clair de cet état de fait. Physiquement, il est tout à fait évident que les $\Gamma^\mu_{\sigma\rho}$ ne peuvent pas être des tenseurs : ils sont précisément les objets correspondant à la partie « non tensorielle » de la dérivée partielle. Dans un référentiel en chute libre les variations δq^μ s'annulent et donc les coefficients de connexion aussi, mais pas dans les autres référentiels.

D'après (4.34) et la définition (4.35) des coefficients de connexion, il apparaît qu'on peut écrire la dérivée covariante

$$\frac{Dq^\mu}{Ds} = \frac{dq^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} q^\sigma \left(\frac{dx^\rho}{ds} \right). \quad (4.36)$$

On admet (il serait simple de le montrer) que la dérivée covariante s'écrit pour les composantes du covecteur :

$$\frac{Dq_\mu}{Ds} = \frac{dq_\mu}{ds} - \Gamma^\nu_{\mu\rho} q_\nu \left(\frac{dx^\rho}{ds} \right). \quad (4.37)$$

On peut maintenant chercher ce que serait la dérivée covariante d'un tenseur de rang 2. Considérons l'invariant $A_{\mu\nu} q^\mu q^\nu$. Cet invariant n'est pas affecté par le passage au référentiel en chute libre et par les transformations générales, c'est-à-dire $\delta(A_{\mu\nu} q^\mu q^\nu) = 0$. Soit :

$$\delta A_{\mu\nu} q^\mu q^\nu + A_{\mu\nu} \delta q^\mu q^\nu + A_{\mu\nu} q^\mu \delta q^\nu = 0. \quad (4.38)$$

Or $\delta q^\mu = -\Gamma^\mu_{\sigma\rho} q^\sigma \Delta x^\rho$. Donc :

$$\delta A_{\mu\nu} q^\mu q^\nu = A_{\mu\nu} \left(\Gamma^\mu_{\sigma\rho} q^\sigma q^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\rho} q^\mu q^\sigma \right) \Delta x^\rho. \quad (4.39)$$

Soit, en renommant les indices muets, *i.e.* ceux sur lesquels on somme (en l'occurrence $\mu \rightarrow \tau$ et $\sigma \rightarrow \mu$ dans le premier terme et $\nu \rightarrow \tau$ et $\sigma \rightarrow \nu$ dans le second terme) :

$$\delta A_{\mu\nu} q^\mu q^\nu = \left(A_{\tau\nu} \Gamma^\tau_{\mu\rho} q^\mu q^\nu + A_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\rho} q^\mu q^\nu \right) \Delta x^\rho. \quad (4.40)$$

En simplifiant¹ par q^μ et q^ν , on obtient :

$$\delta A_{\mu\nu} = \left(\Gamma^\tau_{\mu\rho} A_{\tau\nu} + \Gamma^\tau_{\nu\rho} A_{\mu\tau} \right) \Delta x^\rho. \quad (4.41)$$

Soit, avec

$$\frac{DA_{\mu\nu}}{Ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta A_{\mu\nu} - \delta A_{\mu\nu}}{\Delta s}, \quad (4.42)$$

l'expression de la dérivée covariante d'un tenseur de rang 2 :

$$\frac{DA_{\mu\nu}}{Ds} = \frac{dA_{\mu\nu}}{ds} - \Gamma^\tau_{\mu\rho} A_{\tau\nu} \frac{dx^\rho}{ds} - \Gamma^\tau_{\nu\rho} A_{\mu\tau} \frac{dx^\rho}{ds}. \quad (4.43)$$

Quand on la regarde de près, cette expression est très naturelle : on retrouve le terme correspondant à la dérivée usuelle, le terme où l'on contracte le coefficient de connexion avec le premier indice du tenseur et le terme où l'on contracte le coefficient de connexion avec le second indice du tenseur. Comme pour toute équation de relativité générale (et pas seulement !) il faut prendre le temps de l'interpréter pour « sentir » chacun des termes : ce qui semblait un barbarisme mathématique (pour certains) se révèle n'être qu'une – presque – banalité. Évidemment, cette expression se généralise immédiatement à un tenseur de rang n .

4.2.3 Calcul des coefficients de connexion : théorème fondamental

Tout l'information sur la structure de l'espace-temps étant contenue dans la métrique, il doit être possible d'exprimer les coefficients de connexion en fonction de celle-ci. Grâce à l'expression (4.43), on peut évaluer la dérivée covariante de la métrique :

$$\frac{Dg_{\mu\nu}}{Ds} = \frac{dg_{\mu\nu}}{ds} - \Gamma^\tau_{\mu\rho} g_{\tau\nu} \frac{dx^\rho}{ds} - \Gamma^\tau_{\nu\rho} g_{\mu\tau} \frac{dx^\rho}{ds}, \quad (4.44)$$

$$\times \frac{ds}{dx^\rho} \implies \frac{Dg_{\mu\nu}}{Dx^\rho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma^\tau_{\mu\rho} g_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\rho} g_{\mu\tau}. \quad (4.45)$$

1. Il pourrait paraître illégitime de simplifier par q^μ et q^ν puisqu'il y a une sommation sur les indices répétés. En effet, une somme de termes peut bien être nulle sans que chaque terme le soit. En réalité, c'est tout à fait légitime : il suffit de considérer cette égalité pour des valeurs des paramètres telles qu'à chaque fois un seul terme de la somme est non nul, et il apparaîtra alors clairement que cette condition doit bien être respectée.

Notons, une fois de plus, que l'écriture $\times \frac{ds}{dx^\rho}$ pour passer de l'avant-dernière ligne à la dernière ligne a essentiellement valeur mnémotechnique. En réalité il suffit de penser qu'on change de paramétrisation en utilisant x^ρ plutôt que s . Ce qui est à la fois plus simple et plus rigoureux. Dans un référentiel en chute libre (où les coefficients de connexion s'annulent donc) :

$$\frac{Dg_{\mu\nu}}{Dx^\rho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}. \quad (4.46)$$

De plus, dans ce référentiel, la métrique est localement plate et ses dérivées nulles (métrique de la relativité restreinte) :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Dg_{\mu\nu}}{Dx^\rho} = 0. \quad (4.47)$$

Mais cette équation est une équation tensorielle. Elle est valable dans tous les référentiels ! On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} &= \Gamma^\tau_{\mu\rho} g_{\tau\nu} + \Gamma^\tau_{\nu\rho} g_{\mu\tau}, \\ \text{avec} \quad \Gamma_{\mu\nu\rho} &= g_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\rho}, \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} &= \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

On note

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\rho} &\equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}, \\ \Rightarrow \quad g_{\mu\nu,\rho} &= \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Reste à inverser cette expression. Notons d'abord (ce qui est, presque, évident à partir de la définition) que les coefficients de connexion sont symétriques :

$$\Gamma^\sigma_{\mu\rho} = \Gamma^\sigma_{\rho\mu} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\sigma\mu\rho} = \Gamma_{\sigma\rho\mu}. \quad (4.50)$$

L'équation (4.49) s'écrit alors :

$$g_{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho}, \quad (4.51)$$

$$g_{\rho\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\rho\nu} + \Gamma_{\rho\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\rho\mu\nu}, \quad (4.52)$$

$$g_{\nu\rho,\mu} = \Gamma_{\rho\nu\mu} + \Gamma_{\nu\rho\mu} = \Gamma_{\rho\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\rho}. \quad (4.53)$$

En effectuant (4.51)-(4.52)+(4.53), on obtient :

$$g_{\mu\nu,\rho} - g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} = 2\Gamma_{\nu\mu\rho}. \quad (4.54)$$

Cette expression

$$\Gamma_{\nu\mu\rho} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\rho} - g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu}), \quad (4.55)$$

qui exprime les coefficients de connexion en fonction des dérivées de la métrique, constitue le *théorème fondamental de la géométrie riemannienne*.

On peut à ce point introduire la notation

$$q^\mu_{;\nu} \equiv \frac{Dq^\mu}{Dx^\nu}, \quad (4.56)$$

qui permet d'écrire la dérivée covariante sous la forme :

$$\bullet \quad q^\mu_{;\nu} = q^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} q^\rho. \quad (4.57)$$

4.3 COVARIANCE GÉNÉRALISÉE ET ÉQUATION GÉODÉSIQUE

4.3.1 Covariance générale

On peut maintenant revenir au principe de covariance généralisé postulé par Einstein et l'exprimer plus clairement :

- Les lois physiques peuvent être exprimées comme des équations tensorielles de façon à demeurer valides par transformation vers un référentiel accéléré quelconque.
- Dans un référentiel en chute libre, les lois doivent être celles connues dans le cadre de la relativité restreinte.

Le fondement de la dynamique est la loi de Newton qui s'écrit en relativité restreinte :

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (4.58)$$

La partie droite de cette équation n'est pas un tenseur. Pour en « faire un tenseur », il faut remplacer la dérivée usuelle par une dérivée covariante :

$$F^\mu = \frac{Dp^\mu}{D\tau}. \quad (4.59)$$

C'est maintenant une équation tensorielle qui se réduit à celle connue en relativité restreinte dans un référentiel en chute libre. C'est la procédure générale postulée par Einstein : *on obtient les lois physiques correctes en remplaçant les dérivées usuelles par des dérivées covariantes*. En utilisant les notations précédemment introduites (une virgule pour la dérivée usuelle et un point virgule pour la dérivée covariante),

on peut ainsi résumer tout ce qui vient d'être dit : l'écriture de la physique en espace courbe consiste à opérer la substitution :

$$, \longrightarrow ;$$

Au chapitre 2, nous avons écrit les équations de Maxwell : $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ et $\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$. En notation condensée, cela s'écrit $F^{\mu\nu}_{;\mu} = j^\nu$ et $F^{[\mu\nu,\sigma]} = 0$ (ou le crochet signifie qu'on effectue la somme sur la permutation des indices). Si maintenant on souhaite écrire ces équations en espace courbe, il suffit de remplacer les dérivées par des dérivées covariantes :

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = j^\nu \text{ et } F^{[\mu\nu,\sigma]} = 0. \quad (4.60)$$

Bien évidemment, pour utiliser pratiquement ces équations, il faut calculer explicitement la dérivée covariante et donc connaître la métrique (puisque le coefficient de connexion s'exprime en fonction des dérivées de la métrique). Ce sera l'enjeu du prochain chapitre.

4.3.2 Équation géodésique : première dérivation

La première question à se poser pour penser la dynamique en espace courbe consiste à chercher quel est le mouvement des particules libres, c'est à dire soumises à aucune force (hormis la gravité, mais celle-ci n'est, précisément, plus maintenant considérée comme une force). L'équation dynamique s'écrit donc

$$\frac{Dp^\mu}{D\tau} = 0. \quad (4.61)$$

Cette écriture demande que p^μ soit transporté parallèlement. Mais comme p^μ est l'impulsion de la particule considérée, il « pointe » dans la direction de propagation. Autrement dit, p^μ est donc transporté parallèlement à lui-même, ce qui est parfaitement cohérent avec la notion de géodésique précédemment introduite.

Avec

$$p^\mu = m \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{et} \quad \frac{Dq^\mu}{Ds} = \frac{dq^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} q^\nu \frac{dx^\rho}{ds}, \quad (4.62)$$

l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (4.63)$$

Cette expression constitue l'équation géodésique. Le temps propre n'est clairement pas un bon paramètre si on souhaite considérer la propagation de photons. Mieux vaut alors utiliser un paramètre affine λ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \quad (4.64)$$

La masse n'intervient évidemment pas : la géométrie riemannienne est (heureusement) compatible avec le principe d'équivalence.

Par ailleurs, $\frac{Dx^\mu}{Ds^2} = 0$. Autrement dit, il n'y a pas de composante de courbure pour les géodésiques dans l'espace courbe considéré.

4.3.3 Équation géodésique : seconde dérivation

Du point de vue géométrique, les géodésiques sont les lignes les plus courtes entre des événements d'espace-temps. Physiquement, elles sont les trajectoires des masses-test en chute libre. Une troisième propriété est liée à ce qu'elles sont les trajectoires stationnaires. C'est intéressant, par exemple, pour les calculs d'orbite. On va ici le montrer un peu plus en détail.

Considérons les trajectoires stationnaires $\delta I = 0$ avec

$$I \equiv \int \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds \right). \quad (4.65)$$

Soit :

$$I = \int g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \frac{1}{ds} = \int ds, \quad (4.66)$$

puisque $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2$. Ce qui est bien une écriture légitime de l'intervalle à extrémiser. On veut montrer que la condition $\delta I = 0$ mène à l'équation géodésique. En mécanique lagrangienne, on sait que si on appelle $I = \int L d\tau$, le principe de moindre action $\delta I = 0$ conduit aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu} \right) = 0, \quad (4.67)$$

où l'on a considéré que L était fonction de x^μ et q^μ avec $q^\mu = dx^\mu/d\tau$. Posons, en accord avec (4.65), $L = g_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta$.

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} q^\alpha q^\beta, \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu} = g_{\alpha\mu} q^\alpha + g_{\mu\beta} q^\beta, \quad (4.69)$$

puisque c'est une dérivation partielle et que q est indépendant de x . Si cette dernière ligne ne vous semble pas immédiatement évidente, il suffit d'écrire explicitement la somme et de voir que la dérivation par rapport à q^μ est non nulle seulement quand $\beta = \mu$ pour la somme sur β , et quand $\alpha = \mu$ pour la somme sur α . On a donc en

dérivant (4.69) :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} \right) = \frac{dg_{\alpha\mu}}{d\tau} \cdot \dot{q}^\alpha + \frac{dg_{\mu\beta}}{d\tau} \cdot \dot{q}^\beta + g_{\alpha\mu} \frac{d\dot{q}^\alpha}{d\tau} + g_{\mu\beta} \frac{d\dot{q}^\beta}{d\tau} \quad (4.70)$$

$$= \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\sigma} \cdot \frac{dx^\sigma}{d\tau} \cdot \dot{q}^\alpha + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\sigma} \cdot \frac{dx^\sigma}{d\tau} \cdot \dot{q}^\beta + 2g_{\mu\alpha} \frac{d\dot{q}^\alpha}{d\tau} \quad (4.71)$$

$$= g_{\alpha\mu,\sigma} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\sigma + g_{\mu\beta,\sigma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\sigma + 2g_{\mu\alpha} \frac{d\dot{q}^\alpha}{d\tau}. \quad (4.72)$$

Pour passer de la première à la seconde ligne, on a juste utilisé la symétrie du tenseur métrique et « reparamétrisé » les dérivations en écrivant $\frac{dg_{\alpha\mu}}{d\tau} \cdot \dot{q}^\alpha = \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\sigma} \cdot \frac{dx^\sigma}{d\tau} \cdot \dot{q}^\alpha$.
Donc, les équations d'Euler-Lagrange (4.67) conduisent, avec (4.68) et (4.72) à :

$$g_{\alpha\beta,\mu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - g_{\alpha\mu,\sigma} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\sigma - g_{\mu\beta,\sigma} \dot{q}^\beta \dot{q}^\sigma - 2g_{\mu\alpha} \frac{d\dot{q}^\alpha}{d\tau} = 0 \quad (4.73)$$

$$\iff g_{\alpha\beta,\mu} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - g_{\alpha\mu,\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - g_{\mu\beta,\alpha} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - 2g_{\mu\alpha} \frac{d\dot{q}^\alpha}{d\tau} = 0. \quad (4.74)$$

Or, le théorème fondamental de la géométrie riemannienne s'écrit

$$-2\Gamma_{\mu\beta\alpha} = -g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\mu\alpha,\beta}. \quad (4.75)$$

Donc l'équation (4.74) équivaut à :

$$-2\Gamma_{\mu\beta\alpha} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - 2g_{\mu\alpha} \frac{d\dot{q}^\alpha}{d\tau} = 0, \quad (4.76)$$

$$g_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{\beta\alpha} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + g_{\mu\nu} \frac{d\dot{q}^\mu}{d\tau} = 0, \quad (4.77)$$

$$\Gamma^\nu_{\beta\alpha} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \frac{d\dot{q}^\nu}{d\tau} = 0 \quad (4.78)$$

$$\iff \Gamma^\nu_{\beta\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = 0. \quad (4.79)$$

On reconnaît l'équation géodésique !

Exercices

4.1 Un peu de calcul tensoriel

1. Pour un champ de quadri-vecteurs A_μ , définissez un opérateur complètement covariant de « quadri-rotationnel » et exprimez-le en fonction de ∂_λ et des coefficients de connexion.
2. Pour un champ de quadri-vecteurs A^μ , définissez un opérateur complètement covariant de « quadri-divergence » et exprimez-le en fonction de ∂_λ et des coefficients de connexion.
3. Généralisez l'équation d'onde $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Phi = 0$ où Φ est un champ scalaire.

Remarque

Pour un champ scalaire Φ : $\Phi_{;\mu} = \Phi_{,\mu}$. L'expression suivante pourra être utilisée :

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda},$$

où g est le déterminant du tenseur métrique.

4.2 Retour sur la dérivée covariante

On cherche ici à créer un opérateur différentiel D_λ qui, lorsqu'appliqué à un tenseur $T^{\dots\mu_i\dots}_{\dots\nu_j\dots}$, assure que $D_\lambda T^{\dots\mu_i\dots}_{\dots\nu_j\dots}$ soit aussi un tenseur.

1. On considère un champ de vecteurs A_μ , fonction de x^λ . Les quantités $\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda}$ et $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}$ sont-elles des tenseurs (justifier) ?
2. Les coefficients de connexion sont-ils des tenseurs (justifier) ?
3. Proposez un opérateur $D_\lambda \equiv \frac{D}{Dx^\lambda}$ tel que $D_\lambda A^\mu$ et $D_\lambda A_\mu$ soient des tenseurs (on pourra s'intéresser à $\Gamma_{\lambda\rho}^\mu A^\rho$ et $\Gamma_{\lambda\mu}^\rho A_\rho$). Ce résultat vous rappelle-t-il quelque chose ?
4. On considère maintenant le déplacement du vecteur A^μ le long d'une courbe C paramétrée par τ . On cherche de nouveau à définir un opérateur différentiel le long de cette courbe qui préserve les propriétés des tenseurs.
 - (a) Montrez que $\frac{dA^\mu}{d\tau}$ n'est pas un tenseur. Proposez alors une généralisation.
 - (b) Appliquez cette généralisation au cas de la quadri-vitesse le long de C , i.e. $\frac{dx^\mu}{d\tau}$.

5. On pratique le transport parallèle d'un vecteur le long d'une courbe si celui-ci est déplacé sans variation intrinsèque de ce dernier. Dans le référentiel localement inertiel (autour du point P) muni du système de coordonnées localement inertielles $\xi^\mu(P)$, cela se traduit par $\left. \frac{\partial A^\mu}{\partial \xi^\lambda} \right|_P = 0$.
- En considérant un petit déplacement $d\tau$ le long de la courbe autour de P , expliquez pourquoi $\left. \frac{\partial A^\mu}{\partial \xi^\lambda} \right|_P = 0$ est une condition suffisante pour avoir $dA^\mu = 0$. Écrivez alors $\left. \frac{dA^\mu}{d\tau} \right|_P$ au voisinage de P en fonction de ξ^μ .
 - Écrire l'équation du transport parallèle dans un système de coordonnées quelconque x^λ .
 - Appliquez ce dernier résultat au cas de la quadri-vitesse. Quelle est l'interprétation géométrique de l'équation du mouvement d'une particule dans un espace courbe ?

Remarque

Les coefficients de connexion en fonction d'un système de coordonnées localement inertiel sont :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

On a, de plus, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$.

4.3 Équation des géodésiques en champ faible

On se propose de dériver l'approximation newtonienne de l'équation des géodésiques. Cela revient à considérer que la particule se déplace lentement par rapport à la vitesse de la lumière dans un champ gravitationnel *faible et stationnaire*.

- Comment se comparent les différentes composantes de la quadri-vitesse $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ dans le cas d'une particule non relativiste (on comparera en particulier $\frac{dx^i}{d\tau}$ à $\frac{dx^0}{d\tau}$) ? Simplifiez alors l'équation des géodésiques (4.64).
- Expliquez de façon qualitative ce qu'un champ gravitationnel faible signifie en termes de courbure et de métrique. Proposez une approximation du tenseur métrique.
- Que signifie l'approximation d'un champ stationnaire ?
- Donnez les coefficients de connexion Γ_{00}^μ à l'aide de ces deux approximations.
- En cumulant l'ensemble des approximations définissant la limite newtonienne, écrivez :
 - l'équation des géodésiques pour $\mu = 0$. Qu'en déduisez-vous concernant la composante « temps » de la quadri-vitesse.
 - l'équation des géodésiques pour $\mu = 1, 2, 3$. Donnez alors l'approximation newtonienne de g_{00} .

On considère deux horloges *identiques*, l'une située en un point A et l'autre en un point B . Ces horloges émettent des photons à une fréquence *propre* identique. On rappelle que la fréquence de réception en un point B de photons émis en un point $A \neq B$, en fonction de la fréquence d'émission de ces photons en B est $f_{\text{émission}}^B / f_{\text{réception}}^B = \sqrt{g_{00}(B)/g_{00}(A)}$ (cf. exercice 3.3).

6. Déterminez si la fréquence de réception subit un décalage vers le rouge ou vers le bleu si l'horloge A est plus profonde dans le puits de potentiel gravitationnel que l'horloge B .

Remarque

L'équation de Newton pour la dynamique d'un point soumis à un potentiel newtonien Φ est :

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\mathbf{grad}(\Phi).$$

Pour un corps sphérique de masse M situé en $r = 0$, le potentiel gravitationnel est $\Phi = -\frac{GM}{r}$.

Corrigés

4.1

- On définit le quadri-rotationnel comme $A_{\mu;\lambda} - A_{\lambda;\mu}$. Avec la définition de la dérivation covariante et le fait que $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$, on trouve $A_{\mu;\lambda} - A_{\lambda;\mu} = A_{\mu,\lambda} - A_{\lambda,\mu}$.
- La quadri-divergence est définie comme $A^\mu_{;\mu}$. Cela donne

$$A^\mu_{;\mu} = A^\mu_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} A^\lambda.$$

En notant que

$$\Gamma^\mu_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\lambda},$$

on obtient

$$A^\mu_{;\mu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{A^\mu}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} A^\mu}{\partial x^\mu}.$$

- La généralisation est $g^{\mu\nu} \Phi_{;\mu;\nu} = 0$, qui se réécrit $\Phi^\mu_{;\mu}$. L'équation d'onde n'est autre que la quadri-divergence du quadri-vecteur Φ^μ :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} \Phi^\mu) = 0.$$

Finalement, Φ étant un scalaire, nous avons $\Phi^{;\mu} = \Phi^{,\mu} = g^{\mu\nu}\Phi_{,\nu}$ et l'équation d'onde prend la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} = 0.$$

4.2

1. En effectuant un changement de coordonnées $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$, on obtient

$$\frac{\partial A_{\mu'}}{\partial x^{\lambda'}} = \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right) \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} + \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\mu'}} \right) A_\mu$$

et

$$\frac{\partial A^{\mu'}}{\partial x^{\lambda'}} = \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \right) \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \right) \left(\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\lambda'} \partial x^\mu} \right) A^\mu.$$

Ces deux relations ne satisfont pas à la loi de transformation des tenseurs puisque le second terme du membre de droite n'est pas homogène à un tenseur.

2. On effectue de nouveau un changement de coordonnées $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$. Le plus simple est de partir de l'expression des coefficients de connexion, comme produit de dérivations d'un système de coordonnées localement inertiel, pour montrer que :

$$\Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} = \left(\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \right) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}.$$

3. Sous un changement de coordonnées :

$$\Gamma_{\lambda'\mu'}^{\rho'} A'_\rho = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right) \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \right) \Gamma_{\lambda\mu}^\rho A_\rho + \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\mu'}} \right) A_\mu.$$

En soustrayant $\Gamma_{\lambda'\mu'}^{\rho'} A'_\rho$ à $\partial_{\lambda'} A_{\mu'}$, les termes qui ne sont pas homogènes à un tenseur s'annulent. On définit l'opérateur D_λ comme :

$$D_\lambda A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho A_\rho.$$

Avec une analyse identique, on obtient :

$$D_\lambda A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu A^\rho.$$

L'opérateur D_λ correspond donc à la dérivation covariante.

4. (a) Comme x^μ est une fonction de τ , on peut réécrire

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\lambda}{d\tau} \partial_\lambda A^\mu.$$

$\frac{dx^\mu}{d\tau}$ est un tenseur de rang 1 mais $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}$ n'est pas un tenseur : la quantité $\frac{dA^\mu}{d\tau}$ n'est pas un tenseur. Il suffit de remplacer $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}$ par sa dérivation covariante : $D_\lambda A^\mu$. La dérivation le long d'une courbe est alors :

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\rho.$$

- (b) On retrouve exactement le membre de droite de l'équation des géodésiques, *i.e.*

$$\frac{D}{D\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}.$$

5. (a) Les coordonnées ξ^μ correspondant au référentiel qui est localement inertiel autour de P , elles ne varient pas (au premier ordre) pour un petit déplacement au voisinage de P le long de la courbe. Les règles utilisées en espace plat s'appliquent : $dA^\mu(P) = \left. \frac{\partial A^\mu}{\partial \xi^\lambda} \right|_P d\xi^\lambda$. On en déduit aisément que $dA^\mu = 0$ si $\left. \frac{\partial A^\mu}{\partial \xi^\lambda} \right|_P = 0$ ainsi que $\left. \frac{dA^\mu}{d\tau} \right|_P = \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} \frac{\partial A^\mu}{\partial \xi^\lambda}$.

- (b) Le transport parallèle dans un référentiel localement inertiel s'écrit : $\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{\partial A^\mu}{\partial \xi^\lambda} = 0$. En effectuant un changement de coordonnées quelconque (non inertiel) et en utilisant l'expression des coefficients de connexion en fonction des coordonnées ξ^μ , on obtient alors :

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\rho = 0.$$

- (c) Le transport parallèle de la quadri-vitesse correspond *exactement* à l'équation des géodésiques. Le mouvement des particules suit donc les trajectoires pour lesquelles la quadri-vitesse est transportée parallèlement.

4.3

1. Une particule non relativiste se déplace avec une vitesse bien plus faible que la vitesse de la lumière. En unité naturelle, cela se traduit par : pour $i = 1, 2, 3$ $|v_i| = \left| \frac{dx^i}{dx^0} \right| \ll 1$. On en déduit que $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$ et on négligera les composantes spatiales de la quadri-vitesse dans l'équation des géodésiques :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

2. Un champ gravitationnel faible signifie une faible courbure. La courbure étant très faible, on peut considérer que le tenseur métrique est « proche » de $\eta_{\mu\nu}$: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ avec $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.
3. Un champ est stationnaire s'il ne dépend pas du temps. Ainsi, $h_{\mu\nu}$ ne dépend pas de x^0 .
4. Avec de telles approximations, on trouve au premier ordre en $h_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{00}^{\mu} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\nu}}.$$

5. (a) On trouve

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0.$$

Cela signifie que la composante « temps » de la quadri-vitesse est constante :

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \text{constante}.$$

- (b) En se souvenant que $\eta^{\mu\nu}$ est diagonal, on trouve

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{ii}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2.$$

Avec $\eta^{ii} = -1$ et $\frac{dx^0}{d\tau} = \text{constante}$, l'équation ci-dessus se réécrit

$$\frac{d^2 x^i}{dx^{02}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}.$$

En adoptant des notations {espace+temps} standard : $x^{\mu} = (t, \mathbf{x})$, on pourra facilement identifier $\frac{\partial}{\partial x^i}$ avec l'opérateur gradient pour obtenir

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\mathbf{grad}(h_{00}).$$

En identifiant avec l'équation de Newton, on trouve $g_{00} = 1 + 2\Phi$ où Φ est le potentiel newtonien.

6. En fonction du potentiel newtonien, la relation entre fréquence d'émission et fréquence de réception est

$$f_{\text{réception}}^B = \sqrt{\frac{1 + 2\Phi_A}{1 + 2\Phi_B}} f_{\text{émission}}^B.$$

Si A est plus profond dans le potentiel gravitationnel (i.e. $r_A < r_B$), alors $\Phi_A < \Phi_B$.

On en déduit que $f_{\text{réception}}^B < f_{\text{émission}}^B$: il y a décalage vers le rouge.

SECOND ASPECT DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE : COMMENT LA MASSE CRÉE LA COURBURE

5

INTRODUCTION

Ce chapitre entend exposer les équations de champ d'Einstein qui exhibent le lien explicite entre le contenu de l'espace-temps et l'évolution de sa géométrie. À cette fin, est d'abord introduit le tenseur énergie-impulsion, puis le tenseur de courbure de Riemann. En conclusion, quelques pistes sur les extensions de la relativité générale sont esquissées.

Il y a au moins deux raisons évidentes de rechercher explicitement la manière dont l'espace-temps est déformé par son contenu. La première consiste évidemment à se souvenir qu'il s'agit du cœur de toute notre démarche. La gravitation n'étant plus considérée comme une force mais comme une déformation de la trame spatio-temporelle, il est naturel de chercher le lien explicite entre l'une et l'autre. La seconde consiste à remarquer, comme déjà mentionné, que la démarche générale présentée au chapitre précédent ne s'applique pas à la gravitation de Newton. Le principe de covariance généralisé demande, en effet, de partir de lois compatibles avec la relativité restreinte. Et le fait est que nous ne disposons pas d'une telle loi pour la gravitation ! La loi de Newton n'est clairement pas invariante de Lorentz (ne serait-ce que parce qu'elle suppose une vitesse de propagation infinie de l'interaction gravitationnelle : aucun terme de « délai » n'est présent dans l'expression des forces). Pour établir la manière précise dont la géométrie est déformée par la présence des corps, il faut utiliser deux tenseurs fondamentaux : le tenseur de Riemann et le tenseur énergie-impulsion.

5.1 TENSEUR DE COURBURE DE RIEMANN

5.1.1 Définition

La façon la plus simple de percevoir intuitivement le tenseur de Riemann consiste certainement à le penser comme une généralisation, dans un espace de dimensionnalité supérieure, de la courbure gaussienne à deux dimensions.

Pour le définir clairement, considérons un chemin fermé infinitésimal sur lequel on transporte parallèlement un vecteur v^α . Notons di le premier morceau du chemin et dj le second (par exemple orthogonal au premier). La courbe fermée (ici un rectangle) est alors composée de di , de dj puis de $-di$ et de $-dj$. En utilisant $dq^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} q^\gamma dx^\beta$, les variations du vecteur v^α sur chaque segment sont respectivement :

$$- \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) v^\gamma(x) di^\beta \quad (5.1)$$

$$- \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x + di) v^\gamma(x + di) dj^\beta \quad (5.2)$$

$$+ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x + dj) v^\gamma(x + dj) di^\beta \quad (5.3)$$

$$+ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) v^\gamma(x) dj^\beta. \quad (5.4)$$

En combinant la première expression avec la troisième, et la deuxième avec la quatrième, on obtient (en se souvenant que $f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$) :

$$dv^\alpha = \frac{\partial(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma)}{\partial x^\gamma} di^\gamma di^\beta - \frac{\partial(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma)}{\partial x^\delta} di^\delta dj^\beta \quad (5.5)$$

$$= di^\beta dj^\gamma \left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\gamma} v^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\gamma} \right) - di^\delta dj^\beta \left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} v^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\delta} \right). \quad (5.6)$$

Étant donné que $dv^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} v^\sigma dx^\gamma$, on peut réécrire cela comme :

$$dv^\alpha = di^\delta dj^\gamma v^\beta \left(\Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \right) \quad (5.7)$$

$$= di^\delta dj^\gamma v^\beta R^\alpha_{\beta\gamma\delta}, \quad (5.8)$$

où

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \equiv \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}, \quad (5.9)$$

est le tenseur de Riemann. Il caractérise la courbure de l'espace-temps. Bien que ce ne soit pas évident à partir de l'équation (5.9), on voit à partir de (5.8) que $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ est bien un tenseur : il correspond à une différence locale de vecteurs.

Si l'on se place dans un référentiel en chute libre, les coefficients de connexion s'annulent mais pas leurs dérivées. On a donc :

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta}, \quad (5.10)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho} R^\rho_{\beta\gamma\delta} = \Gamma_{\alpha\beta\delta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma,\delta}. \quad (5.11)$$

Or $2\Gamma_{\nu\mu\rho} = g_{\mu\nu,\rho} - g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu}$. Donc :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}). \quad (5.12)$$

Le premier et le quatrième termes se simplifiant, on peut synthétiser (en écrivant le troisième terme en premier, suivi du deuxième, du sixième et du cinquième) :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta}). \quad (5.13)$$

Le tenseur de Riemann n'encode pas la même information que les coefficients de connexion. Ces derniers peuvent toujours être (localement) annulés par un choix approprié de référentiel. Ce qui n'est pas le cas pour le tenseur de Riemann qui ne s'annule que si l'espace-temps est plat, quel que soit le système de coordonnées¹.

En espace courbe, deux géodésiques initialement parallèles ne le resteront pas (ce qu'on voit bien avec les cercles de longitude à la surface de la Terre qui sont parallèles à l'équateur mais se coupent au pôle). Soit ξ un vecteur liant deux géodésiques à x et $x + \xi$. Les équations géodésiques sont respectivement :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \quad (5.14)$$

$$\frac{d^2 (x + \xi)^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x + \xi) \frac{d(x + \xi)^\nu}{d\tau} \frac{d(x + \xi)^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (5.15)$$

Or, au premier ordre :

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x + \xi) = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) + \xi^\rho \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu(x). \quad (5.16)$$

Par ailleurs,

$$\frac{d(x + \xi)^\nu}{d\tau} \frac{d(x + \xi)^\lambda}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau}. \quad (5.17)$$

On peut donc réécrire (5.15) au premier ordre en ξ et au point x comme :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (5.18)$$

On peut procéder à la différence (5.18)–(5.14) :

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (5.19)$$

Si on se place dans un référentiel en chute libre où les coefficients de connexion s'annulent, on a donc :

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu(x) \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (5.20)$$

1. On peut noter que le tenseur de Riemann implique les dérivées *secondes* du tenseur métrique. Or dans un espace de courbure non nulle, il est impossible d'annuler toutes les dérivées secondes du tenseur métrique.

Par ailleurs, par définition de la dérivée covariante, on peut écrire :

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad (5.21)$$

$$\Rightarrow \frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\lambda,\nu}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \text{termes où } \Gamma \text{ n'est pas dérivé.} \quad (5.22)$$

Les termes où Γ n'est pas dérivé s'annulent dans un référentiel en chute libre. En éliminant $\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}$ entre (5.22) et (5.20), il apparaît :

$$\frac{D^2\xi^\nu}{D\tau^2} - \Gamma_{\rho\lambda,\nu}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (5.23)$$

Dans le deuxième terme, λ et ν jouent des rôles symétriques. En tenant compte de cela, on obtient immédiatement :

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} + (\Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu - \Gamma_{\rho\nu,\lambda}^\mu) \xi^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (5.24)$$

Or

$$R_{\nu\rho\lambda}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu - \Gamma_{\rho\nu,\lambda}^\mu, \quad (5.25)$$

en se souvenant que $\Gamma_{\rho\nu}^\mu = \Gamma_{\nu\rho}^\mu$. On en déduit :

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} + R_{\nu\rho\lambda}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (5.26)$$

C'est ce qu'on nomme l'équation de la déviation géodésique.

5.1.2 Quelques remarques

Cette équation de déviation géodésique est la généralisation des relations (3.18) et (3.19) du chapitre 3. Nous avons alors établi que sur une sphère les géodésiques initialement parallèles s'éloignent suivant $\frac{d^2\eta}{ds^2} + \frac{\eta}{R^2} = 0$ où $1/R^2$ est la courbure gaussienne. La formule (5.26) de ce chapitre en est l'extension à des espaces de dimensionnalité plus élevée.

Suivant le langage imagé introduit par Misner, Thorne et Wheeler, on peut voir le tenseur de Riemann comme une sorte de machine disposant de trois « entrées » pour y insérer des vecteurs. En « sortie », on disposera alors d'un vecteur (c'est une façon de dire qu'en contractant trois fois un tenseur de rang 4 avec un tenseur de rang 1 on obtient un tenseur de rang $4 - 3 = 1$). Choisissons une géodésique fiducielle – ligne d'univers d'une particule libre – et un événement d'espace-temps P .

Notons $\mathbf{u}$ la quadrivélocité de la particule (vecteur tangent) en P . Considérons une géodésique voisine et notons ξ la séparation orthogonale à la géodésique fiducielle. Si l'on insère $\mathbf{u}$ dans la première entrée de la « machine tenseur de Riemann », ξ dans la deuxième et $\mathbf{u}$ dans la troisième, la sortie sera l'opposée de l'accélération de la séparation géodésique. C'est le sens profond du tenseur de Riemann : il renseigne directement sur la manière dont la courbure de l'espace-temps fait diverger ou converger des géodésiques initialement parallèles.

À ce stade, il est intéressant de tenter une analogie avec l'électromagnétisme. L'équation (5.26) concentre tout l'effet de la géométrie sur la matière. Elle est l'équivalent gravitationnel de l'expression du mouvement pour une charge q soumise à la force de Lorentz :

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\tau^2} - \frac{q}{m} F^\alpha_\beta \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (5.27)$$

Si cette écriture tensorielle ne vous est pas familière, vous pouvez réécrire tous les termes à l'aide des composantes du champ-tenseur électromagnétique données au chapitre 2 et il apparaîtra immédiatement que cette formule n'est rien d'autre que la version manifestement covariante de $m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$. Le champ-tenseur électromagnétique a 16 composantes (dont seulement 6 ne sont pas triviales) et le tenseur de Riemann en comporte 256 (dont 20 non triviales). Dans les deux cas, ces tenseurs sont les « champs-moteur » des processus en question. Dans les deux cas, l'accélération dépend de toutes les composantes de la quadri-vélocité de la particule. Cependant, l'accélération n'est universelle que dans le cas gravitationnel. Elle est alors définie de façon relative entre deux particules-test voisines tandis que, pour l'électromagnétisme, elle est proportionnelle à q/m et définie par rapport à la trajectoire d'une particule fiducielle neutre passant au même endroit avec la même quadri-vélocité.

Si, comme on l'a suggéré tout au long de cet ouvrage, la gravitation est une manifestation de la courbure de l'espace, une question se pose. Considérons deux points A et B situés à 5 mètres l'un de l'autre, par exemple les coins d'une pièce. Supposons qu'ils sont à la même hauteur (même coordonnée z). Appelons x l'axe qui joint A à B . Si on lance un objet de A vers B , la trajectoire s'effectue donc à $y = 0$. Si cet objet est un ballon de football, il faut l'envoyer à quelques mètres de hauteur : il va monter et redescendre en B . La trajectoire présente manifestement une courbure importante. Mais si cet objet est une balle de fusil, il ne faut orienter le canon que très légèrement au-dessus de l'horizontale. La trajectoire de A en B est quasiment rectiligne et présente manifestement une faible courbure. Comment est-ce possible si, comme on le dit, la courbure est une caractéristique de l'espace et s'applique donc de la même façon à tous les corps ? On sent que la différence de trajectoires entre la balle de fusil et le ballon vient de la différence de vitesse. Pourquoi ? Tout simplement parce qu'il ne faut pas raisonner dans l'espace mais dans l'espace-temps ! En lieu et place de l'axe y qui ne joue aucun rôle dans cet exemple, portons le temps t . Clairement, le

ballon prend plus de temps pour aller de A à B que la balle de fusil. La trajectoire est donc fortement « étirée » le long de l'axe t pour le ballon alors qu'elle ne l'est pas pour la balle de fusil. Dans l'espace-temps la courbure est bien la même. Il n'est donc pas anodin que la relativité générale ait été construite par celui qui avait, quelques années auparavant, inventé la relativité restreinte. C'est la courbure spatio-temporelle qui fait sens.

5.2 TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION

5.2.1 Définition

Pour lier, comme on souhaite le faire, la géométrie au contenu de l'espace-temps, il faut un objet mathématique qui décrive correctement ce contenu.

En relativité restreinte, on dispose du quadrivecteur impulsion-énergie. Il existe un lien fort entre masse, énergie et impulsion :

$$E^2 = p^2 + m^2. \quad (5.28)$$

Vraisemblablement, la loi de la gravitation universelle généralisée ne contiendra donc pas que la masse et l'énergie mais aussi l'impulsion. Pour sentir ce que peut être la structure de l'objet requis, prenons l'exemple d'un nuage de poussière non relativiste. Dans son référentiel propre S , il a une densité d'énergie $\rho_0 = m_0 n_0$ où m_0 est la masse (et donc l'énergie en unités naturelles) d'un grain de poussière et n_0 le nombre de grains par unité de volume. Par hypothèse, il n'y a ni terme cinétique ni terme potentiel. Vu depuis un référentiel S' se déplaçant avec la vitesse β constante par rapport au nuage :

$$m_0 \rightarrow m_0 \gamma, \quad (5.29)$$

$$n_0 \rightarrow n_0 \gamma, \quad (5.30)$$

$$\text{donc} \quad \rho_0 \rightarrow \rho = \rho_0 \gamma^2. \quad (5.31)$$

Le premier facteur γ vient de la transformation de l'énergie suite à une transformation de Lorentz. Le second facteur γ vient de ce qu'on s'intéresse à des densités. Or les longueurs sont contractées d'un facteur $1/\gamma$ et donc les densités augmentées d'un facteur γ . Clairement, ρ n'est pas un scalaire, auquel cas il serait invariant. Il n'est pas non plus une composante d'un quadri-vecteur, auquel cas il se transformerait linéairement en γ (les quadrivecteurs se transforment en relativité restreinte suivant la transformation de Lorentz). Le comportement de ρ est celui de la composante temps-temps d'un tenseur de rang 2 (les tenseurs de rang 2 se transforment suivant le produit de deux transformations de Lorentz). Dans le référentiel S de la poussière,

seule la composante 00 est non nulle : $(T^{00})_0 = \rho_0$. Par transformation de S en S' : $(T^{00})_0 \rightarrow \gamma^2 (T^{00})_0$.

On peut construire un objet plus général qui s'applique à des structures plus complexes qu'un nuage de poussière et respecte la structure de tenseur de rang 2 que l'on vient de mettre en évidence. On le nomme tenseur « énergie-impulsion » et on le note $T^{\mu\nu}$. La composante $T^{\mu\nu}$ est le flux de la μ^{eme} composante de quadri-impulsion suivant la direction ν .

Par exemple :

- T^{00} est la densité d'énergie ;
- T^{0i} est le flux d'énergie à travers la surface unité suivant i ;
- T^{ii} est le flux de la i^{eme} composante d'impulsion dans la direction i par unité de surface ;
- T^{ij} est le flux de la i^{eme} composante d'impulsion dans la direction j par unité de surface. Cela témoigne l'entraînement visqueux ;
- T^{i0} est la densité de la i^{eme} composante d'impulsion.

On voit clairement ici qu'après une transformation de Lorentz les composantes spatiales vont se mêler au T^{00} . Si l'on pressent intuitivement que T^{00} est lié à la courbure spatiale, on voit donc que toutes les composantes de $T^{\mu\nu}$ vont contribuer à la courbure ! C'est en contradiction avec la vision classique. On dit souvent que la pression dans une étoile empêche l'effondrement gravitationnel. Ici, au contraire, la pression peut augmenter la courbure et jouer un rôle favorable à l'effondrement d'une étoile en trou noir².

5.2.2 Conservations

Soit une petite boîte cubique de côté l . Le taux de changement du contenu énergétique de la boîte est $l^3 \frac{\partial T^{00}}{\partial t}$. Ceci provient nécessairement des flux à travers les six faces. Soit, pour les faces en x et $x + l$:

$$l^2 T^{01}(x) - l^2 T^{01}(x + l) = l^3 \frac{\partial T^{00}}{\partial t}, \quad (5.32)$$

où le premier terme est positif puisque c'est un flux entrant et le second négatif puisque c'est un flux sortant. Pour un volume élémentaire (*i.e.* $l \sim dx$ et

2. S'il est dit que la pression empêche l'effondrement gravitationnel d'une étoile, c'est par un effet hydro-dynamique et non par un effet gravitationnel.

$f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$:

$$l^3 \frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -l^2 \left[T^{01}(x + l) - T^{01}(x) \right] \quad (5.33)$$

$$= -l^2 \cdot l \left(\frac{\partial T^{01}}{\partial x} \right). \quad (5.34)$$

On peut mener exactement le même raisonnement pour les autres faces. Ce qui conduit à :

$$l^3 \frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -l^3 \left(\frac{\partial T^{01}}{\partial x} + \frac{\partial T^{02}}{\partial y} + \frac{\partial T^{03}}{\partial z} \right). \quad (5.35)$$

Soit :

$$\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (5.36)$$

Ce qu'on peut encore noter $T^{0\alpha}_{,\alpha} = 0$. Autrement dit, $T^{0\alpha}$ est à divergence nulle. En menant le même raisonnement pour la conservation de l'impulsion, on obtient :

$$T^{\beta\alpha}_{,\alpha} = 0. \quad (5.37)$$

Cela résume toutes les lois de conservation de la quadri-impulsion en relativité restreinte et revient à demander que les divergences du tenseur énergie-impulsion s'annulent partout. Si l'on connaît un peu de mécanique lagrangienne et que l'on sait qu'à chaque symétrie continue est associée une quantité conservée, il est intéressant de noter que le tenseur énergie-impulsion est le courant de Noether associé aux translations spatiales.

La généralisation de ce résultat aux espace courbes s'obtient immédiatement en appliquant le principe de covariance généralisée. Il faut donc utiliser des dérivées covariantes :

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (5.38)$$

Si l'on souhaite utiliser le même « langage imagé » que pour le tenseur de Riemann, on pourrait dire que le tenseur énergie-impulsion est une machine à deux entrées qui permet de rendre compte du flux de quadri-impulsion dans l'espace-temps. Si l'on insère dans la première entrée la quadri-vélocité de l'observateur et qu'on laisse l'autre vide, on obtient en retour la densité de quadri-impulsion (*i.e.* la quadri-impulsion par unité de volume tridimensionnel mesurée dans le référentiel de Lorentz de l'observateur). Si l'on insère la quadri-vélocité de l'observateur dans une entrée et dans l'autre un vecteur unitaire arbitraire $\mathbf{n}$, la sortie est la composante de quadri-impulsion dans la direction $\mathbf{n}$. Si l'on insère la quadri-vélocité de l'observateur dans les deux entrées, la sortie est la densité de masse-énergie (mesurée dans le référentiel de Lorentz où la vitesse est $\mathbf{u}$).

En résumé, le tenseur énergie-impulsion :

- s'annule en l'absence de contenu ;
- est de rang 2 ;
- est de divergence nulle ;
- est symétrique.

5.3 ÉQUATIONS D'EINSTEIN

Pour achever la construction de la relativité générale, il faut élaborer un objet géométrique (caractérisant la gravité) à mettre en regard du tenseur énergie-impulsion, ce dernier représentant le contenu de l'espace-temps. Cet objet, que l'on nomme tenseur d'Einstein, doit être construit « avec » la géométrie de l'espace-temps et rien d'autre. On lui impose les caractéristiques suivantes :

1. il doit s'annuler en espace-temps plat de façon à être une mesure « naturelle » de la courbure ;
2. il doit être construit avec le tenseur de courbure de Riemann ;
3. il doit être linéaire en Riemann ;
4. il doit être symétrique et de rang 2 ;
5. il doit être à divergence nulle.

Il est important de souligner que toutes ces conditions ne sont pas absolument nécessaires d'un point de vue purement logique. Avant d'argumenter en leur faveur, il faut mentionner le fait que d'autres théories *a priori* légitimes auraient pu être proposées. Certaines, d'ailleurs, ayant des vertus particulières du point de vue expérimental ou théorique, sont toujours étudiées. Le point (1) revient à dire que le tenseur d'Einstein est une mesure de la courbure et non pas seulement de la géométrie. Le point (2) signifie que l'on utilise les « outils à disposition ». A noter d'ailleurs que le tenseur de Riemann s'exprime lui-même en fonction de dérivées de la métrique. Le point (3) est une hypothèse de « naturalité ». Le point (4) est directement lié à la structure du tenseur énergie-impulsion en regard duquel il sera placé. Le point (5) est plus délicat. En première approximation on peut le voir comme une conséquence de ce que le tenseur énergie-impulsion est à divergence nulle. En réalité il est préférable de voir cette contrainte comme une condition de « conservation automatique » de la mesure de la courbure.

On peut sentir la nécessité de cette hypothèse d'une façon ici présentée brièvement. Si les équations d'Einstein ont l'ambition de prédire l'évolution de la géométrie, il faut que la spécification des conditions initiales et de leur dérivées premières suffise à connaître l'état ultérieur. La géométrie de l'espace-temps est décrite par $ds^2 = g_{\mu\nu}(P)dx^\mu dx^\nu$, c'est à dire par 10 fonctions $g_{\mu\nu}$ en P . Il semble donc que 10 conditions initiales soient nécessaires. Il n'en est rien. Considérons un nouveau système de coordonnées $x^{\mu'}$ défini par $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\mu)$ qui décrit la même géométrie par de nouvelles fonctions métriques $g_{\mu'\nu'}(P)$. Il ne faut pas que les équations de champ d'Einstein permettent de déterminer les 10 fonctions : le choix des coordonnées est l'affaire du physicien, pas de la physique. Les équations de champ ne *doivent* spécifier que 6 contraintes indépendantes de façon que l'arbitraire du choix des coordonnées demeure. Comment se peut-il que les 10 équations d'Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ (introduites ci-dessous) n'en soient en fait que 6? Précisément grâce à la condition $G_{\mu\nu}^{\mu\nu} = 0$ qui nous intéresse ici et qui permet de faire en sorte que seules 6 équations indépendantes puissent être extraites des équations de champ³. Cette « contrainte » mathématique est bien évidemment motivée par une exigence physique : les lois de la nature sont indépendantes du système de coordonnées. Elle révèle aussi une propriété centrale de la relativité générale : si $g_{\mu\nu}$ est une solution des équations d'Einstein alors $g_{\mu'\nu'}$, obtenu à partir de $g_{\mu\nu}$ par changement global du système de coordonnées, est lui aussi solution des équations d'Einstein, décrivant la même situation physique. Comme il le sera clairement expliqué au paragraphe 5.5, cette « sous-détermination » du tenseur métrique (*i.e.* uniquement 6 des 10 composantes sont déterminées de façon univoque par les équations d'Einstein) est un des deux ingrédients à l'origine de *l'invariance de jauge* de la relativité générale sous l'action des difféomorphismes.

Nous ne mènerons pas ici la démonstration, mais il est remarquable qu'il existe une solution unique à ce système de contraintes. On la note $G_{\mu\nu}$ (qui est donc le tenseur d'Einstein) :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (5.39)$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, obtenu par contraction du tenseur de Riemann $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$, et R est le scalaire de Ricci obtenu par contraction sur le tenseur de Ricci $R \equiv R^\alpha_\alpha$.

Les équations d'Einstein consistent simplement à supposer que le tenseur d'Einstein est proportionnel au tenseur énergie-impulsion. La constante de proportionnalité s'obtient en demandant que la limite en champ faible soit compatible avec la théorie newtonienne. On obtient alors :

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}} \quad (5.40)$$

en unités naturelles. Ce qui s'écrit, avec les unités complètes, $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$. L'expression (5.40) constitue les équations de champ d'Einstein. Elle lie la géométrie (à gauche) au contenu (à droite).

3. Cette condition de divergence nulle est réalisée en pratique à partir des *identités de Bianchi*, un jeu d'identités différentielles systématiquement satisfaites par le tenseur de Riemann.

Au niveau conceptuel, ces équations sont d'une importance considérable. Elles déconstruisent l'image d'un espace-temps fixe, « en soi », dans lequel les phénomènes se déroulent. Elles montrent que le cadre est fondamentalement assujéti au contenu. Comme si la morphologie des cases de notre échiquier cosmique devenait une conséquence de la position des pièces. L'espace-temps est maintenant soumis à des équations d'évolution ! Il devient un phénomène comme un autre. Comme toute autre théorie physique (se traduisant par une ou des équations différentielles), la relativité générale ne dit pas ce que sont les choses mais comment elles évoluent. Elle ne renseigne pas sur la géométrie du monde mais sur la dynamique de cette géométrie.

Au niveau technique, les équations d'Einstein constituent un système d'équations différentielles permettant de trouver des métriques. Si l'on connaît le contenu de l'espace-temps (le tenseur énergie-impulsion), les équations (5.40) permettent de calculer la métrique puisque le tenseur d'Einstein s'écrit lui-même en fonction de la métrique et de ses dérivées. Du point de vue pragmatique, ces équations sont très complexes et non linéaires : il est délicat d'en trouver des solutions, même numériquement.

Cette non-linéarité reflète quelque chose de profond : le fait que le champ gravitationnel se couple à lui-même ou, pour le dire autrement, que la gravité gravite. C'est, d'une certaine façon, une conséquence du principe d'équivalence : si la gravitation ne se couplait pas à elle-même, un atome gravitationnel (dans lequel deux particules seraient liées par la gravité) aurait une masse inertielle différente de sa masse gravitationnelle. La non-linéarité témoigne de la rétroaction de la gravité sur elle-même. Si l'on connaît un peu de physique des particules il peut être intéressant de penser cela en termes de diagrammes de Feynman. La linéarité de l'électromagnétisme ne permet pas à deux photons d'échanger un photon (virtuel) pour interagir. Au contraire, deux gravitons peuvent, suite à la non-linéarité des équations, échanger un graviton⁴. Les gravitons emportent de l'énergie, l'énergie crée de la courbure, il est donc naturel qu'ils puissent « émettre » d'autres gravitons. On sent d'ailleurs ici les prémisses du problème des divergences qui apparaissent quand on tente de décrire la gravitation de manière quantique.

Si l'on revient à la question posée au chapitre précédent, à savoir écrire les équations de Maxwell en présence de gravitation, la démarche serait donc la suivante :

- écrire les équations de l'électromagnétisme en relativité restreinte ;
- se donner une distribution de masse ;
- simplifier la forme de la métrique compte tenu des symétries de la distribution de masse (si on se place, par exemple, au voisinage d'un corps sphérique comme la

4. Cette caractéristique n'est pas exceptionnelle. La non-linéarité est également à l'œuvre dans les équations de l'interaction nucléaire forte : la chromodynamique quantique permet aux gluons d'échanger des gluons.

Terre, la forme de la métrique se simplifie considérablement grâce aux invariances par rotation) ;

- résoudre les équations d'Einstein avec cette distribution de masse pour trouver explicitement les coefficients métriques non trivialement fixés par les symétries ;
- calculer les coefficients de connexion associés et en déduire la forme explicite de la dérivée covariante ;
- récrire les équations de l'électromagnétisme en remplaçant les dérivées usuelles par des dérivées covariantes dont l'expression complète est maintenant connue.

5.4 ONDES GRAVITATIONNELLES

Ce paragraphe est moins intuitif que l'essentiel de ce chapitre. Il peut être omis en première lecture.

La théorie de la gravitation d'Einstein concilie l'interaction gravitationnelle avec la relativité restreinte. Ainsi, la force de gravitation ne peut pas se propager instantanément. En s'inspirant de l'électromagnétisme, on peut légitimement s'attendre à trouver des solutions des équations d'Einstein décrivant la propagation à vitesse finie des perturbations du champ gravitationnel. En envisageant la relativité générale comme une théorie de champ, ces *ondes gravitationnelles* peuvent être associées à des flux de gravitons. Elles illustrent par ailleurs la nature profonde de la relativité générale en tant que théorie de jauge.

Le but de ce paragraphe est de montrer succinctement comment les équations d'Einstein se ramènent à une équation d'onde en utilisant une approximation spécifique puis un choix approprié de coordonnées, *i.e.* un choix de jauge. Il n'entend donc pas fournir une présentation exhaustive du vaste sujet des ondes gravitationnelles.

5.4.1 Équations d'Einstein linéarisées

La forme générale des équations d'Einstein ne fait pas explicitement apparaître la présence d'ondes gravitationnelles. Ces équations prennent toutefois la forme d'une équation d'onde dans la limite des *champs faibles*.

En l'absence de gravitation, l'espace-temps est plat et le tenseur métrique se réduit à $\eta_{\mu\nu}$. La limite des champs faibles consiste alors à supposer que le tenseur métrique est identique au tenseur $\eta_{\mu\nu}$ auquel est ajoutée une petite perturbation $h_{\mu\nu}$, telle que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (5.41)$$

À partir de ce tenseur métrique, les coefficients de connexion ainsi que le tenseur de Riemann peuvent être calculés en prenant soin de se limiter au premier ordre

en $h_{\mu\nu}$. Les quantités ainsi calculées seront notées ${}^{(1)}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, ${}^{(1)}R$, etc. De plus, comme nous travaillons sur une théorie linéarisée autour de l'espace-temps de Minkowski, le tenseur $\eta_{\mu\nu}$ est suffisant pour faire monter ou descendre les indices.

Suivant cette approximation, les coefficients de connexion et le tenseur de Ricci prennent les formes suivantes :

$${}^{(1)}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial h_{\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h_{\nu}^\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \right] \quad (5.42)$$

et

$${}^{(1)}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 h_{\mu}^\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_{\nu}^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\mu}^\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \right]. \quad (5.43)$$

On en déduit alors les équations d'Einstein⁵ au premier ordre en $h_{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} + \frac{\partial^2 h_{\lambda}^\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu}^\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\nu}^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = -16\pi G S_{\mu\nu}, \quad (5.44)$$

avec $S_{\mu\nu} = \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \right)$.

5.4.2 Invariance de jauge et choix de jauge

En effectuant un changement de coordonnées infinitésimales⁶ : $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ tel que $\xi_{\mu,\nu}$ soit du même ordre de grandeur que $h_{\mu\nu}$, la nouvelle quantité $h'_{\mu\nu}$ est automatiquement solution de l'équation (5.44) si $h_{\mu\nu}$ l'est aussi. On peut comprendre cela de la manière suivante : dans la théorie linéarisée, le tenseur de Riemann est donné par l'équation (5.13) en remplaçant $g_{\mu\nu}$ par $h_{\mu\nu}$. Par un changement de coordonnées infinitésimales, le tenseur de Riemann transformé s'écrit comme

$$\begin{aligned} R'_{\lambda\mu\rho\nu} &= R_{\lambda\mu\rho\nu} \\ &+ \text{termes du type } \sim \xi_{,\mu}^\sigma h_{\lambda\nu,\rho\sigma} \text{ et } \sim \xi_{,\mu\rho}^\sigma h_{\lambda\nu,\sigma} \\ &+ \text{termes du type } \sim \xi_{,\mu}^\sigma \xi_{\lambda,\nu\rho\sigma} \text{ et } \sim \xi_{,\mu\rho}^\sigma \xi_{\lambda,\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

5. Nous utilisons ici une deuxième forme des équations d'Einstein : $R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \right)$. Cette formulation s'obtient en deux étapes. On contracte tout d'abord la première formulation des équations d'Einstein avec $g^{\mu\nu}$ pour obtenir $R = -8\pi G T^\lambda_\lambda$. (Cela consiste à prendre la trace des équations d'Einstein.) On injecte ensuite cette expression dans la première forme des équations d'Einstein pour dériver la deuxième.

6. Ce changement de coordonnées infinitésimales est la transformation la plus générale qui préserve l'approximation de champs faibles. On peut en effet facilement se convaincre que si $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu}$ n'est pas petit devant 1, alors $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\nu}$ ne se décomposera plus comme $g'_{\mu\nu} = \eta'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$ avec $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$.

Or les derniers termes sont du deuxième ordre, donc négligeables. Il en découle qu'à l'ordre linéaire, ${}_{(1)}R'_{\lambda\mu\rho\nu} = {}_{(1)}R_{\lambda\mu\rho\nu}$. De fait, le tenseur d'Einstein est lui aussi inchangé. Les deux solutions $h_{\mu\nu}$ et $h'_{\mu\nu}$ décrivent strictement la même situation physique. Cette sous-détermination des solutions correspond à l'invariance de jauge de la théorie – c'est à dire à notre liberté de choisir le système de coordonnées – ici illustrée dans le cas spécifique des champs faibles.

Les équations d'Einstein linéarisées (5.44) ne sont *a priori* pas beaucoup plus « limpides » que les équations d'Einstein génériques. Elles peuvent toutefois être grandement simplifiées à l'aide d'un choix de jauge judicieux : si le système de coordonnées est arbitraire, il est loisible de choisir celui qui rend les équations *les plus simples possible*. Une fois ce choix effectué, les équations résultantes – quoique plus simples dans leur forme – ne sont plus *généralement covariantes* puisque valides uniquement dans le système de coordonnées que nous avons fixé. Dans le cas précis des équations d'Einstein en champ faible, un choix de jauge approprié consiste à imposer la contrainte $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$, appelée *jauge harmonique*. Cette contrainte fixant la jauge *n'est pas* une équation covariante. Mais tel est justement son rôle : figer les équations dans un système de coordonnées (si possible judicieusement choisi).

Il est essentiel ici de se convaincre que le choix de jauge ne brise pas la covariance généralisée de la théorie elle-même : une fois un système de coordonnées choisi, les équations ne sont plus manifestement covariantes mais cette perte trace simplement un choix spécifique de jauge pour l'écriture considérée.

Au premier ordre en $h_{\mu\nu}$, la *jauge harmonique* se traduit par

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} h^{\lambda}_{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h^{\lambda}_{\lambda} = 0. \quad (5.46)$$

En dérivant cette condition de jauge par rapport à x^{ν} , on observe alors que les trois derniers termes du membre de droite des équations d'Einstein linéarisées (5.44) s'annulent. Ainsi :

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x_{\lambda}} = -16\pi G S_{\mu\nu}. \quad (5.47)$$

Cette équation est manifestement une équation d'onde. Le membre de gauche décrit la propagation d'une déformation de l'espace-temps – une onde gravitationnelle – et le membre de droite s'interprète comme la *source* de ces ondes. Cependant, cette équation ne peut être pensée indépendamment de l'équation (5.46) puisque cette dernière fixe la condition de jauge pour laquelle les équations d'Einstein linéarisées prennent cette forme simplifiée⁷.

7. Dans la limite newtonienne – mouvement non relativiste de la source et champ gravitationnel faible et stationnaire – l'équation des ondes gravitationnelles se ramène à l'équation de Poisson en gravitation

Affirmer que l'on peut choisir le système de coordonnées telle que l'équation (5.44) prenne la forme d'une équation d'onde est une chose. Montrer que ce choix est toujours possible en est une autre. Supposons que les coordonnées x^μ ne satisfont pas à la condition de jauge harmonique, i.e. $g^{\mu\nu}(x)\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \neq 0$. En effectuant un changement de coordonnées infinitésimales, $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, on obtient⁸ $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$. En imposant à $h'_{\mu\nu}$ de vérifier la condition donnée par l'équation (5.46), il est alors possible de choisir ξ^μ pour que le nouveau système de coordonnées nous place dans la jauge harmonique. Les quatre fonctions arbitraires doivent vérifier :

$$\frac{\partial^2 \xi_\nu}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} h'^\mu_\nu - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h'^\mu_\mu. \quad (5.48)$$

La transformation infinitésimale est, elle aussi, solution d'une équation d'onde. On peut d'ailleurs noter que la jauge harmonique n'est pas ici définie de façon univoque. La condition de jauge harmonique est en effet toujours respectée si $\xi^\mu \rightarrow \xi'^\mu = \xi^\mu + \epsilon^\mu$ avec ϵ^μ solution de $\frac{\partial^2 \epsilon^\mu}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} = 0$. (Ce type de fonction est appelée *fonction harmonique*.)

5.4.3 Solution en onde plane

En l'absence de source, les solutions sont données par des ondes planes progressives. La déformation de l'espace-temps s'écrit :

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda} + e_{\mu\nu}^\dagger e^{-ik_\lambda x^\lambda}, \quad (5.49)$$

où k_λ est le vecteur d'onde et $e_{\mu\nu}$ le tenseur de polarisation de l'onde. L'expression ci-dessus est bien une solution de $\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} = 0$ si le vecteur d'onde vérifie $k_\lambda k^\lambda = 0$. Ainsi $h_{\mu\nu}$ décrit la propagation d'une onde de déformation d'espace-temps de masse nulle, et se déplaçant donc à la vitesse de la lumière.

Par l'argument générique suivant lequel le tenseur métrique ne contient que 6 degrés de liberté physiquement indépendants, il apparaîtrait que le tenseur polarisation $e_{\mu\nu}$, ne contient lui aussi que 6 degrés de liberté. Pour que la solution en onde plane (5.49) vérifie la condition de jauge harmonique, il est en effet nécessaire d'avoir

$$k_\lambda e^\lambda_\mu - \frac{1}{2} k_\mu e^\lambda_\lambda = 0. \quad (5.50)$$

Cette dernière équation cache 4 relations liant les différentes composantes du tenseur de polarisation. Nous retrouvons bien ici, dans le cas spécifique de la jauge

non relativiste : $\Delta \Phi = 4\pi G \rho_M$ avec Δ l'opérateur laplacien, Φ le potentiel newtonien et ρ_M la densité volumique de la source.

8. Pour obtenir cette « loi » de transformation au premier ordre, il faut se souvenir que c'est le tenseur métrique complet $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ qui se transforme et qu'on définit ensuite $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$.

harmonique, que seules $10 - 4 = 6$ des 10 composantes du tenseur polarisation correspondent à des degrés de liberté physiques.

Par ailleurs, la jauge harmonique n'étant pas définie de façon univoque, 4 autres degrés de liberté dans le tenseur de polarisation sont supprimés. Supposons que $h_{\mu\nu}$ soit solution de l'équation (5.47) avec $S_{\mu\nu} = 0$. Effectuons alors le changement de coordonnées infinitésimales suivant $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ tel que $\frac{\partial^2 \epsilon^\nu}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} = 0$. Cela transforme $h_{\mu\nu}$ en $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu,\nu} - \epsilon_{\nu,\mu}$. En implémentant explicitement ce changement de coordonnées dans l'équation (5.47), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} = \frac{\partial^2 h'_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_\mu}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_\nu}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \right). \quad (5.51)$$

Puisque nous avons choisi ϵ^μ comme étant une fonction harmonique, il s'ensuit que les deux derniers termes du membre de droite sont nuls. Ainsi,

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} = \frac{\partial^2 h'_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \quad (5.52)$$

et on peut montrer qu'il en va de même pour la condition de jauge (5.46). Les deux solutions $h_{\mu\nu}$ et $h'_{\mu\nu}$ décrivent le même processus physique. Apparaît donc, par le choix arbitraire des quatre fonctions ϵ^μ , la possibilité de supprimer 4 degrés de liberté supplémentaires. Ainsi, le tenseur polarisation $e_{\mu\nu}$ contient $10 - 4 - 4 = 2$ degrés de liberté physiques.

Il est essentiel de noter ici que, bien que la perturbation métrique $h_{\mu\nu}$ soit transformée de part et d'autre de l'égalité (5.52) – i.e. $h_{\mu\nu}$ intervient dans le membre de gauche tandis que $h'_{\mu\nu}$ intervient dans le membre droit –, le système de coordonnées est quant à lui *inchangé*. Cela est rendu possible au premier ordre en $h_{\mu\nu}$, mais ne l'est pas en général.

Si, par exemple, l'onde gravitationnelle se déplace suivant la direction x_3 (i.e. $k_1 = k_2 = 0$), il est toujours possible de choisir ϵ^μ tel que $e_{11} = -e_{22}$ et $e_{12} = e_{21}$ soient les deux seules composantes indépendantes et non nulles du tenseur de polarisation. Ainsi, les déformations de l'espace-temps véhiculées par l'onde gravitationnelle sont suivant les directions x_1 et x_2 : l'onde est transverse.

Il est donc clair que les équations d'Einstein conduisent inévitablement à l'apparition d'ondes gravitationnelles. Ces ondes gravitationnelles correspondent à des déformation de l'espace-temps – des perturbations de la métrique – se déplaçant à la vitesse de la lumière. Comme les ondes électromagnétiques, les ondes gravitationnelles sont transverses et possèdent 2 états de polarisation, qui sont toutefois ici de nature quadrupolaire de par la structure tensorielle de rang 2 de la métrique.

5.5 QU'EST EXACTEMENT LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE ?

5.5.1 Le cœur de la théorie

Einstein a découvert que l'espace-temps et le champ gravitationnel sont une seule et même entité. Une entité dynamique, soumise à des équations du mouvement et, dans une large mesure, semblable aux autres entités rencontrées en physique. De ce point de vue, il est peut-être plus légitime de ne pas considérer, comme cela est souvent proposé, qu'il faut renoncer à l'existence du champ gravitationnel et penser un espace-temps malléable, mais plutôt qu'il faut se passer de l'espace-temps et voir à sa place un champ gravitationnel dynamique (comme tous les autres champs) qui en tient lieu. Mathématiquement, les deux visions sont évidemment les mêmes mais leurs portées et significations ontologiques ne sont peut-être pas exactement identiques. Nous proposons finalement de jongler, suivant les situations, entre ces manières de décrire la gravité. Mais gardons en tête que tous les autres secteurs de la physique étant décrits par des champs en évolution et en interaction, il est sans doute plus naturel de considérer que la leçon majeure de la relativité générale est l'absence d'espace-temps au profit du seul champ gravitationnel sur lequel (ou dans lequel) nous habitons.

Comme l'écrit C. Rovelli, en physique newtonienne et en relativité restreinte, si on retire les entités dynamiques (particules et champs), demeurent l'espace et le temps. En relativité générale, si on s'affranchit des grandeurs dynamiques, il ne reste... rien ! L'espace et le temps de Newton et Minkowski sont réinterprétés comme des configurations particulières du champ gravitationnel. En ce sens, les particules ne sont pas dans l'espace mais bel et bien sur le champ gravitationnel. Le monde comme une collection de champs vivant « les uns sur les autres » : tel est le message d'Einstein.

Il s'agit de s'abstraire de l'espace « pur », de l'espace « en soi » (presque de l'espace « pour soi ») de la physique newtonienne et minkowskienne. Il faut renouer avec une vision ou une visée purement relationnelle. Renouer car l'idée n'est pas nouvelle : elle s'inscrit dans une longue lignée physique et philosophique, d'Anaximandre à Leibniz, d'Aristote à Berkeley.

Cette absence d'espace-temps fixe sur lequel se déploieraient les phénomènes se nomme *invariance de fond*. Techniquement, cela équivaut à l'invariance (de jauge) de l'action sous l'effet des difféomorphismes. Un difféomorphisme n'est rien d'autre qu'une transformation qui fait glisser sans « à-coup » tous les champs et particules d'une région à une autre. L'invariance par difféomorphisme est la conséquence de deux propriétés de l'action : son invariance par changement arbitraire de coordonnées et le fait qu'il n'existe pas de champ de fond non dynamique.

Il est intéressant d'illustrer ceci à l'aide de l'argument du « trou d'Einstein », là encore reformulé par Rovelli. On peut distinguer trois temps dans le rapport d'Einstein à la covariance.

Dans un premier temps, Einstein fut favorable à la covariance. Autrement dit, il demanda que les équations pour le champ gravitationnel $e_\mu^I(x)$ soit généralement covariante : si $e_\mu^I(x)$ est une solution, alors $e_\mu^{I'}(y)$ doit aussi être solution. Ici, par référence implicite aux notations usuelles en gravitation quantique, problématique qui a replacé ces interrogations au centre du débat, on appelle champ gravitationnel le champ de tétrade $e_\mu^I(x)$. Il est lié à la métrique par $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{IJ} e_\mu^I(x) e_\nu^J(x)$. Il n'est pas utile pour comprendre l'argument d'être familier avec ces notations. On définit $e_\mu^{I'}(y)$ par $e_\nu^{I'}(y) = \frac{\partial x^\mu(y)}{\partial y^\nu} e_\mu^I(x(y))$. La requête d'Einstein consiste donc à demander que les lois de la nature soient les mêmes dans tous les référentiels (et donc dans tous les systèmes de coordonnées).

Mais, dans un deuxième temps, Einstein revint sur la covariance. C'est l'argument du trou et il est fort simple. Considérons une région de l'espace-temps F sans matière dans laquelle se trouvent deux points A et B . Soit e le champ gravitationnel dans cette région. Supposons que le champ est « plat » en A et « ondulant » en B . Considérons maintenant une fonction ϕ (difféomorphisme actif) qui fait passer du point A au point B (et réciproquement) et se réduit à l'identité hors de la région F . Soit $\tilde{e}$ le nouveau champ gravitationnel. Le champ est maintenant « ondulant » en A et « plat » en B . Pourtant, par hypothèse, les sources (la distribution de matière) n'ont pas changé puisque ϕ se réduit à l'identité hors du trou. Comment le champ peut-il avoir changé en A et en B si les sources n'ont pas été modifiées ? Il semble bien que la situation soit paradoxale et que la condition de covariance doive être abandonnée.

Pourtant, dans un troisième temps, Einstein revint (définitivement) à la covariance. La résolution du paradoxe du « trou » réside dans la compréhension de ce que les points A et B n'existent pas « en eux-mêmes ». Il n'y a plus d'espace absolu. Si A est défini comme le point de rencontre de deux géodésiques et B comme celui de deux autres géodésiques, il n'y a plus aucun paradoxe : les valeurs du champ en A et B sont bien les mêmes qu'avant l'application de ϕ . Autrement dit, les deux solutions (e, x_a, x_b) et $(\tilde{e}, \tilde{x}_a, \tilde{x}_b)$ ne se distinguent que par leur positionnement sur la variété (le *manifold*). Si la localisation est définie seulement par rapport aux champs et aux particules eux-mêmes, rien ne distingue plus ces deux solutions. La théorie est invariante de jauge (dans le sens de Dirac) sous l'action des difféomorphismes (actifs) : il y a une redondance mathématique, le même monde peut être décrit par différentes solutions des équations du mouvement.

Cela illustre le caractère fondamentalement *relationnel* et *relativiste* de la théorie d'Einstein. Les choses ne valent pas absolument mais les unes par rapport aux autres.

5.5.2 Un mot sur le graviton

Quand on approche la relativité générale comme une théorie de champ, on dit que l'interaction est médiée par un boson sans masse de spin 2 nommé graviton. Pourquoi, intuitivement, en est-il ainsi ?

D'abord, le fait que la gravitation soit une force à longue portée signifie que l'énergie d'interaction varie comme $1/r$. Il n'y a pas d'autre possibilité en théorie des champs. La particule échangée doit avoir une masse nulle pour que la force soit proportionnelle à $1/r^2$. Techniquement, si le spin était demi-entier, il n'y aurait pas d'interférence entre les amplitudes correspondant à un échange et à l'absence d'échange. Plus intuitivement, disons que cela vient de ce qu'on veut, comme le souligne Feynman, produire une force statique et pas seulement des processus de diffusion. Il faut donc que l'émission ou l'absorption d'un unique graviton par n'importe laquelle des deux particules interagissantes laisse les deux particules dans le même état interne, ce qui serait impossible avec un graviton de spin demi-entier. Une théorie de spin 1 serait essentiellement similaire à l'électrodynamique. Il n'y a rien d'incohérent ici, si ce n'est que ce type de théorie produit nécessairement des forces répulsives. Ce qui élimine en fait tous les spins impairs. Pour éliminer le spin 0, il faut penser que dans ce cas la gravitation ne se couplerait pas avec les photons de spin 1. Ce qui est pourtant manifestement le cas. Bien que rien n'interdise, *a priori* de considérer des théories gravitationnelles avec des médiateurs de spins 4, 6, 8, etc. (associées à des symétries de jauge extrêmement complexes), la situation cohérente la plus simple est bien celle d'un graviton de spin 2.

Le spin 2 du graviton (*i.e.* sa description par un tenseur de rang 2) est également lié au caractère quadrupolaire des ondes gravitationnelles. La connexion se lit dans le théorème de Lifshitz. Pour une perturbation scalaire, telle une onde de pression, il n'y a aucune difficulté à disposer d'une source à symétrie sphérique. Sur une sphère de rayon r , on peut avoir un champ de pression qui prend partout la valeur p . Au contraire, il n'est pas possible de dessiner sur la surface de cette sphère un champ vectoriel continu d'amplitude constante non nulle. Ce qui signifie plus clairement : quand on se coiffe, il existe forcément une zone « singulière » sur la tête où les cheveux changent brutalement d'orientation (au moins si on inclut la barbe puisque l'argument tient si l'on pave toute la sphère). De même, il est impossible de paver la surface d'une sphère continûment avec un champ matriciel 2×2 non nul transverse et sans trace qui ne diffère d'un point à l'autre que par une rotation. Ce qui, plus clairement, signifie que la topologie interdit qu'un objet symétrique soit source d'ondes gravitationnelles.

5.5.3 Action du champ gravitationnel

Nous ne nous fondons pas dans ce livre sur la description lagrangienne. Le lecteur n'ayant aucune notion de mécanique lagrangienne peut passer ce petit paragraphe.

Il est néanmoins pratique de donner la forme de l'action d'Einstein-Hilbert. Celle-ci s'écrit :

$$S_H = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (5.53)$$

où g est le déterminant du tenseur métrique, le signe « $(-)$ » permettant à la quantité sous la racine d'être positive (puisque la signature lorentzienne conduit à un déterminant négatif). En variant cette action, à laquelle il faut ajouter l'action relative à la présence de matière⁹ S_M , on retrouve effectivement les équations d'Einstein. À condition toutefois de poser un tenseur énergie-impulsion égal à

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (5.54)$$

Sans entrer dans le détail de la définition (5.54), disons que cet objet est effectivement symétrique, de rang 2, automatiquement conservé et a la dimension d'une énergie.

Il est pertinent de s'intéresser à la présence du terme $\sqrt{-g}$ dans (5.53). Celui-ci, en effet, est primordial pour que l'action soit un scalaire¹⁰. Quand on change de coordonnées, $d^4x \rightarrow J d^4x'$ où J est le jacobien de la transformation ($J = \det \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\alpha} \right]$). Soit $d^4x' = \frac{1}{J} d^4x$. Par ailleurs, la transformation du tenseur métrique s'écrit :

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} g_{\alpha\beta}. \quad (5.55)$$

Or, dans un produit matriciel $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$. Donc, en notant $g' = \det(g_{\alpha'\beta'})$, on obtient $g' = J^2 g$. Comme $d^4x' = \frac{1}{J} d^4x$, il apparaît clairement que $\sqrt{-g'} d^4x'$ est bien une quantité invariante, un scalaire. C'est pourquoi, lorsqu'on lit un article de recherche en relativité générale (où il est généralement fait grand usage du formalisme lagrangien) toutes les intégrales se font sur $\sqrt{-g} d^4x$ qui est l'élément de « volume » indépendant du système de coordonnées.

5.5.4 Extensions de la relativité générale

Comme nous le soulignons au paragraphe précédent, il n'existe pas qu'une seule théorie gravitationnelle possible et mathématiquement cohérente. Il est évidemment hors de question d'entrer ici dans les détails des généralisations (ou modifications) possibles de la théorie d'Einstein, mais uniquement de donner un exemple pour permettre au lecteur de sentir ce dont il peut s'agir.

9. L'action totale s'écrit $S = S_H + S_M$.

10. En toute rigueur, ce sont les équations du mouvement et non pas l'action qui devraient être les mêmes pour tous les observateurs. Il se pourrait donc que le fait de demander que l'action soit un scalaire soit « sur-contrainant ». C'est en effet une condition suffisante mais pas forcément nécessaire. D'un point de vue pratique, elle est très efficace dans un contexte relativiste.

Il est important de noter que, là aussi, aucun point de vue n'est absolument consensuel. Nous considérons que l'élément central de la relativité générale est l'invariance de fond, le caractère fondamentalement relationnel de la théorie et *pas* l'action spécifique d'Einstein-Hilbert (conduisant aux équations (5.40)). De notre point de vue, cette action n'est pas essentielle et peut très bien ne correspondre qu'à une approximation « basse-énergie » de la théorie. Beaucoup des arguments utilisés dans sa construction sont, en effet, contestables ou – au moins – réfutables en doute (nous sommes, après tout, au pays de Descartes !). Mais il est honnête de mentionner qu'il n'en va pas de même pour tous les spécialistes de relativité générale : certains considèrent que cette action spécifique est le cœur de la démarche. Le lecteur est invité à construire son propre point de vue et à commencer à comprendre que même une théorie aussi cohérente et bien testée que la relativité générale, vieille de près d'un siècle, est encore sujette à d'intenses débats. C'est, finalement, l'essence de la pensée scientifique...

À titre d'exemple donc, nous proposons ici de mentionner quelques aspects de théories scalaire-tenseur. Dans celles-ci, la gravitation n'est plus seulement médiée par un graviton de spin 2 correspondant à la métrique $g_{\mu\nu}$ mais aussi par un champ scalaire φ . De tels partenaires scalaires apparaissent génériquement dans toutes les théories extradimensionnelles dont, en particulier, la théorie des cordes. De plus, des champs scalaires se révèlent très utiles en cosmologie, notamment pour rendre compte de l'inflation primordiale. Enfin, ces théories scalaire-tenseur respectent l'essentiel des symétries de la relativité générale einsteinienne (lois de conservation, non-variation des constantes de couplage non gravitationnelles, invariance de Lorentz locale).

L'action s'écrit alors :

$$S = \frac{1}{4\pi G} \int \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{4} - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \right\} d^4x \quad (5.56)$$

$$+ S_{\text{mat}} [\text{matiere}; \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv A^2(\varphi) g_{\mu\nu}].$$

Ici, en plus de l'habituel scalaire de Ricci R , on voit apparaître dans l'action un champ φ qui se manifeste par un terme cinétique et un terme potentiel. De plus, tous les champs de matière sont universellement couplés à un tenseur symétrique de rang 2 : $\tilde{g}_{\mu\nu}$. La différence avec la théorie usuelle vient de ce que le terme cinétique de ce tenseur contient maintenant un mélange d'excitations de spin 2 et de spin 0. Il est remarquable que la fonction $A^2(\varphi)$ (qui définit la métrique « vue » par la matière à partir de la métrique gravitationnelle) soit déjà très contrainte expérimentalement. Si l'on procède à un développement de $\ln(A(\varphi))$ en fonction de φ , les coefficients α_0 et β_0 des deux premiers termes (linéaires et quadratiques) ont une interprétation simple : ils correspondent à l'échange d'une particule scalaire entre deux corps (terme α_0^2) ou

entre trois corps (terme $\alpha_0\beta_0\alpha_0$). Les observations des mouvements des astres dans le système solaire permettent de contraindre fortement α_0 (à une valeur faible et donc proche de celle attendue en relativité générale einsteinienne) tandis que les observations de pulsars binaires permettent d'exclure les valeurs trop négatives de β_0 . Il est difficile de s'écarter notablement de l'action d'Einstein-Hilbert et de demeurer compatible avec les observations.

Les libertés dont on dispose ne sont pas infinies. Si l'on ajoute par exemple dans le lagrangien des termes en dérivées n^{emes} de la courbure scalaire R , on peut montrer que cela revient à l'ajout de $n + 1$ champs scalaires supplémentaires et donc, qualitativement, au modèle précédent (généralisé à plusieurs champs). Par ailleurs, si l'on souhaite ajouter des termes faisant intervenir non plus seulement le scalaire de Ricci R mais aussi d'autres contractions des tenseurs de Ricci $R_{\mu\nu}$ et Riemann $R_{\mu\nu\rho\lambda}$, la théorie devient génériquement instable (*i.e.* peuplée de gravitons d'énergie négative). En fait, le seul terme supplémentaire possible est ce qu'on nomme l'invariant de Gauss-Bonnet : $(R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2)$.

L'action s'écrit alors :

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{4\pi G} \int \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{4} - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \right\} d^4x \\ - \hbar \int \sqrt{-g} W(\varphi) (R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu\rho\lambda} - 4R_{\mu\nu}^{\mu\nu} + R^2) d^4x \\ + S_{\text{mat}} [\text{matiere}; \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv A^2(\varphi) g_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Le couplage W est, lui aussi, très contraint observationnellement.

Par ces brefs exemples nous souhaitons simplement souligner le fait que la forme de l'action « fondamentale » (et donc des équations du mouvement) est toujours sujette à débat. Dans l'état actuel des expériences, l'action d'Einstein-Hilbert est satisfaisante. Mais, à la fois pour expliquer certaines observations cosmologiques et pour des raisons théoriques, il n'est pas exclu qu'il soit un jour utile de recourir à des actions plus complexes. Il ne faut jamais perdre de vue que les plus belles théories demeurent construites et donc susceptibles d'être déconstruites.

5.5.5 Constante cosmologique

Il existe une écriture plus générale des équations d'Einstein, faisant intervenir ce qu'on nomme la « constante cosmologique ». Elles s'écrivent alors :

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (5.58)$$

Cette forme est aujourd'hui la plus utilisée dans la mesure où, comme nous le montrerons au chapitre suivant, son importance cosmologique est considérable. Il n'est

pas évident de savoir si la « constante cosmologique » doit être considérée comme une extension de la théorie d'Einstein ou comme un élément naturellement constitutif du cœur de la relativité générale. Le débat sur cette question est d'ailleurs vif dans la communauté des « relativistes ». Notre préférence va à la seconde vision.

D'un point de vue théorique, la présence de ce terme Λ est en effet parfaitement naturelle. L'action (basse énergie) la plus générale pour le champ gravitationnel, invariante sous les symétries appropriées (le groupe de difféomorphisme), contient en effet un terme 2Λ (le coefficient 2 est purement conventionnel) en plus du scalaire de Ricci. Et une telle action conduit aux équations (5.58). Ou, pour le dire autrement, dans un espace-temps de dimension D , il y a exactement $E(D/2)$ tenseurs symétriques (où E désigne la partie entière) présentant les propriétés requises, et conduisant à des équations du mouvement d'ordre 2, à mettre en regard du tenseur énergie impulsion¹¹. En dimension 4, il y a donc 2 tenseurs pertinents et non pas seulement le tenseur d'Einstein. C'est ce que reflète l'équation (5.58).

Historiquement cette constante fut introduite par Einstein pour tenter de rendre compte d'un Univers statique. Puis, elle fut révoquée, prétendument comme la « plus grosse erreur » d'Einstein, de son propre aveu, lorsque l'on comprit que l'Univers était effectivement un système dynamique. Aujourd'hui, elle est à nouveau sur le devant de la scène pour rendre compte de l'accélération récente de l'expansion cosmologique. Qu'en est-il donc ?

Le point fondamental a trait à ce que l'erreur d'Einstein n'a pas consisté à introduire cette constante qui, d'un point de vue mathématique, est naturelle, pour ne pas dire nécessaire. L'erreur consiste à n'avoir pas vu que *même* avec cette constante, les équations d'évolution conduisaient à un Univers dynamique car la solution statique était instable. Ce n'est donc pas la constante cosmologique qui posait problème mais les conséquences erronées qui furent tirées de sa présence.

L'existence d'une constante cosmologique ne dénature donc pas les équations de champ de la relativité. Elle signifie simplement que la courbure de l'espace-temps n'est pas nulle en l'absence de matière. Cette constante, si elle est effectivement présente, est une nouvelle constante fondamentale (au moins à un instant donné de l'histoire des sciences) de la physique. Bien qu'il soit clair qu'une composante de matière présentant une équation d'état du type $p = -\rho$ (ce qui est le cas des fluctuations quantiques du vide) puisse jouer le rôle d'une constante cosmologique effective (puisque le tenseur énergie-impulsion associé est alors proportionnel au tenseur métrique), la constante cosmologique elle-même ne doit pas être assimilée aux fluctuations du vide.

11. Le fait que les équations du mouvement soient d'ordre 2 n'est pas « fortuit ». La théorie d'Ostrogradsky montre en effet que pour les équations du mouvement d'ordre supérieur, on obtient généralement des hamiltoniens non inférieurement bornés et donc des systèmes instables.

Un certain nombre de confusions sont effectivement présentes dans la littérature. Parler du problème de ce que la valeur mesurée de la constante cosmologique (celle qui permet de rendre compte de l'accélération cosmologique, cf. chapitre 6) n'est pas égale – et est même extrêmement différente – de ce que prévoit la théorie quantique des champs en intégrant les fluctuations quantiques du vide est inexact. *Stricto sensu*, la constante cosmologique n'a rien à voir avec les fluctuations du vide. Le fait que ces fluctuations semblent ne pas se coupler à la gravité est un immense problème de physique théorique. Mais il est essentiellement indépendant de la constante cosmologique.

Exercices

5.1 Tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait

Cet exercice porte sur le tenseur énergie-impulsion d'un nuage de particules. Nous supposons ici un espace minkowskien pour étudier ce tenseur.

On considère un nuage de particules se divisant en sous-catégories A , B , C , etc. de manière à ce que les particules composant une sous-catégorie partagent les mêmes propriétés : masse m_A , quadri-vitesse u_A^μ et quadri-impulsion $p_A^\mu = m_A u_A^\mu$. On appellera n_A le nombre de particules A par unité de volume *mesuré dans le référentiel propre des particules A* . On appellera enfin v_A la vitesse des particules dans le référentiel propre (dit aussi comobile) du nuage complet de particules.

1. Quelle est la signification physique du quadri-vecteur $S_A^\mu = n_A u_A^\mu$? (On pourra réécrire ce vecteur dans le référentiel comobile du nuage de particules.) ?
2. À partir de la définition générale du tenseur énergie-impulsion, montrez que

$$T^{\mu\nu} = \sum_A \rho_A^M u_A^\mu u_A^\nu,$$

avec ρ_A^M la masse volumique des particules A mesurée dans le référentiel propre des particules A .

3. Considérons pour finir que ce nuage de particules constitue un fluide parfait.
 - (a) En introduisant les moyennes adaptées dans le tenseur énergie-impulsion du nuage de particules, donnez l'expression générale de $T^{\mu\nu}$ en fonction de la pression p et de la densité d'énergie ρ_E du fluide. Dans quel référentiel ces deux quantités thermodynamiques doivent-elles être mesurées ?
 - (b) Montrez que $T^{\mu\nu} = (\rho_E + p)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu}$.
 - (c) Généralisez ce dernier résultat au cas des espaces courbes.

Remarque

Un fluide parfait est composé de particules n'interagissant pas entre elles et dont la distribution des vitesses est *isotrope* dans le référentiel propre du fluide. Cette symétrie implique que : $\langle \gamma(v)v^i \rangle = 0$ et $\langle \gamma(v)v^i v^j \rangle = \gamma^2(v)v_x^2 \delta^{ij}$, avec $\langle \cdot \rangle$ la moyenne. La pression d'un fluide parfait est donnée par $p = nm \langle \gamma^2(v)v_x^2 \rangle$. (Ces propriétés statistiques proviennent de la théorie cinétique des gaz et nous ne les justifierons pas ici.)

5.2 Pourquoi $8\pi G$?

Les équations d'Einstein relient de façon linéaire $G^{\mu\nu}$ au tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$, c'est-à-dire $G^{\mu\nu} = AT^{\mu\nu}$ avec A une constante. Le critère pour déterminer la valeur de A consiste à exiger que dans la limite non relativiste et de champ faible, la relativité générale aboutisse à l'équation de Poisson : $\Delta\Phi = 4\pi G\rho_M$ avec Δ l'opérateur laplacien, Φ le potentiel gravitationnel et ρ_M la masse volumique de la source gravitationnelle. L'objectif de cet exercice est de déterminer la constante A à l'aide du critère mentionné ci-dessus. Nous le ferons pour le cas spécifique d'un fluide parfait.

Dans l'exercice, on se placera systématiquement dans la limite d'un champ gravitationnel faible et stationnaire.

1. Considérons d'abord un fluide parfait comme source gravitationnelle :

$$T_{\mu\nu} = (\rho_E + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$$

avec p et ρ_E la pression et la densité d'énergie du fluide, mesurées dans son référentiel propre.

(a) Montrez que, dans la limite non relativiste, $\rho_E \simeq \rho_M$ et $p \ll \rho_M$.

(b) Montrez alors que, toujours dans la limite non relativiste, $|T_{00}| \gg |T_{0i}| \gg |T_{ij}|$ et $T_{00} \simeq \rho_M$.

2. Quelle est la hiérarchie entre $|G_{00}|$, $|G_{0i}|$ et $|G_{ij}|$? En déduire une relation entre R_{ij} et $\frac{1}{2}g_{ij}R$ à l'aide des équations d'Einstein et de $T^{ij} \sim 0$ puis montrez que $R = -2R_{00}$.

3. Calculons maintenant G_{00} au premier ordre en $h_{\mu\nu}$.

(a) Pourquoi les termes en $\Gamma \times \Gamma$ du tenseur de Riemann sont-ils sous-dominants dans la limite des champs faibles ? Donnez l'expression du tenseur de Riemann au premier ordre en $h_{\mu\nu}$, noté $R_{\lambda\mu\rho\nu}$.

(b) Justifiez $R_{0000} = 0$ et calculez R_{i0j0} au premier ordre en h_{00} .

(c) Exprimez finalement G_{00} en fonction de h_{00} . (On pourra d'abord exprimer G_{00} en fonction de R_{00} puis exprimer R_{00} à partir de $R_{\mu 0 \nu 0}$.)

4. En réexprimant la composante 00 des équations d'Einstein dans la limite non relativiste et de champ faible, montrez que nécessairement $A = 8\pi G$.

Remarque

Dans le référentiel comobile du fluide parfait, la densité d'énergie est $\rho_E = \rho_M \langle \gamma^2 \rangle$ et la pression est $p = \rho_M \langle \gamma^2 v^2 \rangle$. Dans la limite des champs faibles : $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ avec $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. $\eta_{\mu\nu}$ peut alors être utilisé pour abaisser ou élever les indices. De plus $h_{00} \approx 2\Phi$ (cf. exercice 3.4). Le tenseur de Ricci est défini comme $R_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu}$.

5.3 Identités de Bianchi

Le tenseur de courbure de Riemann vérifie une identité différentielle spécifique appelée *identité de Bianchi*. Cette identité implique que le tenseur d'Einstein est de quadri-divergence nulle, supprimant ainsi quatre des dix degrés de liberté à déterminer par résolution des équations d'Einstein. Ces quatre contraintes sont en relation profonde avec l'invariance de jauge de la relativité générale : les quatre degrés de liberté non déterminés par résolution des équations d'Einstein correspondent au choix du système de coordonnées. Cet exercice consiste à démontrer cette identité en un point P en utilisant un système de coordonnées localement inertielles autour de P , dénotées ξ^μ .

1. Donnez l'expression de la dérivation covariante et du tenseur de Riemann (noté $R_{\lambda\mu\rho\nu}$) au voisinage de P . Pourquoi est-il « naturel » que le tenseur de Riemann implique les dérivées secondes du tenseur métrique ?
2. Montrez que
 - (a) $R_{\lambda\mu\rho\nu} = R_{\rho\nu\lambda\mu}$ et $R_{\lambda\mu\rho\nu} = R_{\mu\lambda\nu\rho} = -R_{\mu\lambda\rho\nu} = -R_{\lambda\mu\nu\rho}$.
 - (b) $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ et $R_{\mu\nu} = -g^{\lambda\rho} R_{\mu\lambda\rho\nu} = -g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\nu\rho} = g^{\lambda\rho} R_{\mu\lambda\nu\rho}$.
3. Commençons par l'identité de Bianchi sur le tenseur de Riemann.
 - (a) Calculez la quantité $B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$ définie comme $R_{\lambda\mu\rho\nu;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\rho;\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma;\rho}$.
 - (b) $B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$ est-elle tensorielle ? La valeur de $B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$ calculée précédemment au point P à l'aide du système de coordonnées localement inertielles peut-elle être généralisée ?
4. Passons aux contractions de l'identité de Bianchi.
 - (a) Calculez $g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$ en fonction des dérivées covariantes du tenseur de Ricci et du scalaire de Ricci.
 - (b) Montrez que $g_{\sigma\mu} G^{\mu\nu}_{;\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$.
 - (c) Déduisez des deux résultats précédents une identité différentielle concernant le tenseur d'Einstein.
 - (d) Quel est le nombre d'équations contenues dans l'écriture condensée $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$? À quoi correspondent ces contraintes ?

Remarque

Le tenseur métrique au voisinage du point P dans le système de coordonnées ξ^μ vaut (cf. chapitre 3) :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda\rho} (x^\lambda - x_{(P)}^\lambda) (x^\rho - x_{(P)}^\rho).$$

On définit le tenseur de Ricci comme $R_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu}$ et le scalaire de Ricci comme $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

Corrigés

5.1

1. Dans le référentiel comobile du nuage de particules, $u_A^\mu = (\gamma(v_A), \mathbf{v}_A \gamma(v_A))$ avec $v_A \equiv |\mathbf{v}_A|$. On trouve alors pour la composante 0 : $S_A^0 = n_A \gamma(v_A)$. Il s'agit de la densité de particules A . On trouve par ailleurs $S_A^i = n_A \gamma(v_A) \mathbf{v}_A^i$, qui correspond donc au flux de particules suivant la direction i . On interprète alors le vecteur S_A^μ comme le quadri-vecteur « flux de particules ».
2. La composante $T^{\mu\nu}$ correspond au flux de la μ -ème composante de la quadri-impulsion suivant la direction ν . Le tenseur énergie-impulsion se construit comme le produit tensoriel de la quadri-impulsion avec le quadri-flux : $T_A^{\mu\nu} = p_A^\mu S_A^\nu = n_A m_A u_A^\mu u_A^\nu$. Le tenseur énergie-impulsion du nuage complet de particules est donc

$$T^{\mu\nu} = \sum_A n_A m_A u_A^\mu u_A^\nu.$$

La masse volumique des particules A , mesurée dans le référentiel propre des particules A , est donnée par $\rho_A^M = n_A m_A$.

3. (a) En introduisant les moyennes, le tenseur énergie-impulsion dans le référentiel propre du fluide est donné par :

$$\begin{aligned} T^{00} &= \sum_A \gamma^2 n_A m_A, \\ T^{0i} &= \sum_A \gamma^2 n_A m_A \langle v_A^i \rangle = 0, \\ T^{ij} &= \sum_A \gamma^2 n_A m_A \langle v_A^i v_A^j \rangle = \sum_A \gamma^2 n_A m_A \langle v_{x,A}^2 \rangle \delta^{ij}. \end{aligned}$$

En introduisant $\rho_E = \sum_A \gamma^2 n_A m_A$ la densité d'énergie mesurée dans le référentiel propre du fluide et $p = \sum_A \gamma^2 n_A m_A \langle v_A^2 \rangle$ la pression mesurée dans le

référentiel propre du fluide, on trouve

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

- (b) On notera que, dans le référentiel propre du fluide, $u_{\text{fluide}}^\mu = (1, 0, 0, 0)$. On a donc

$$u_{\text{fluide}}^\mu u_{\text{fluide}}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut facilement vérifier que l'expression de $T^{\mu\nu}$ obtenue dans la question précédente est bien égale à $T^{\mu\nu} = (\rho_E + p) u_{\text{fluide}}^\mu u_{\text{fluide}}^\nu - p \eta^{\mu\nu}$.

- (c) On peut écrire espace-temps de Minkowski

$$T^{\mu\nu} = (\rho_E + p) u_{\text{fluide}}^\mu u_{\text{fluide}}^\nu - p \eta^{\mu\nu},$$

qui se généralise en

$$T^{\mu\nu} = (\rho_E + p) u_{\text{fluide}}^\mu u_{\text{fluide}}^\nu - p g^{\mu\nu}.$$

La densité d'énergie et la pression, qui ne sont pas des scalaires, sont à mesurer dans le référentiel comobile du fluide.

5.2

1. (a) La densité d'énergie du fluide est $\rho_E = \rho_M \langle \gamma^2 \rangle$. Dans la limite non relativiste $\gamma \sim 1$ et $\rho_E \sim \rho_M$. De même, $p \sim \rho_M \langle v^2 \rangle$ avec $v \ll 1$. On peut donc négliger la pression par rapport à la densité d'énergie de masse.
- (b) Dans la limite non relativiste, $|u_0| \sim 1$ et $|u_i| \ll |u_0|$. On a alors $T_{00} \sim \rho_E$, $T_{0i} \sim \rho_E u_i$ et $T_{ij} \sim \rho_E u_i u_j$, impliquant $|T_{00}| \gg |T_{0i}| \gg |T_{ij}|$. En utilisant de plus $\rho_E \sim \rho_M$ et $p \ll \rho_M$, on montre facilement que $T_{00} \approx \rho_M$.

2. Compte tenu des équations d'Einstein et de la hiérarchie des différentes composantes du tenseur énergie-impulsion, on note tout d'abord $|G_{00}| \gg |G_{0i}| \gg |G_{ij}|$. Puisque $G_{ij} \sim 0$, il est aisé de montrer que $R_{ij} \simeq \frac{1}{2}g_{ij}R$. Dans la limite des champs faibles

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{00} - \sum_{i=1}^3 R_{ii}.$$

Puisque $R_{ij} \simeq \frac{1}{2}\eta_{ij}R$ et $\eta^{ii} = -1$, on montre alors que $R \simeq -2R_{00}$.

3. (a) Dans la limite des champs faibles, Γ est linéaire en $h_{\mu\nu}$. Ainsi les termes $\Gamma \times \Gamma$ sont quadratiques en $h_{\mu\nu}$ et peuvent être négligés. Dans la limite des champs faibles, le tenseur de Riemann est donné par

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} \simeq \Gamma_{\lambda\mu\nu,\rho} - \Gamma_{\lambda\mu\rho,\nu}.$$

En utilisant l'expression des coefficients de connexion dans la théorie linéarisée (voir équation (5.42)) on trouve alors

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} \simeq \frac{1}{2} [h_{\lambda\nu,\mu\rho} - h_{\mu\nu,\lambda\rho} - h_{\lambda\rho,\mu\nu} + h_{\mu\rho,\lambda\nu}].$$

- (b) On considère un champ stationnaire, ainsi $g_{\mu\nu}$ ne dépend pas de x^0 et $R_{0000} = 0$. (On peut aussi vérifier qu'au premier ordre en $h_{\mu\nu}$, $R_{\mu\mu\mu\mu} = 0$ quel que soit μ .) En utilisant le fait que $h_{\mu\nu}$ ne dépend pas de x^0 , on en déduit que

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^i \partial x^j}.$$

- (c) On calcule tout d'abord

$$R_{00} = \eta^{\lambda\rho} R_{\lambda 0 \rho 0} = R_{0000} - \sum_{i=1}^3 R_{i0i0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^i{}^2}.$$

On a de plus $G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}R = 2R_{00}$. Cela donne finalement

$$G_{00} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^i{}^2}.$$

4. En identifiant $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^i{}^2}$ avec l'opérateur laplacien et en utilisant $h_{00} = 2\Phi$, la composante 00 des équations d'Einstein est alors :

$$2\Delta\Phi = A\rho_M.$$

Pour retrouver l'équation de Poisson, il faut donc choisir $A = 8\pi G$.

5.3

1. Au voisinage de P les dérivées premières du tenseur métrique s'annulent. Les coefficients de connexion (mais pas leurs dérivées !) sont nuls. On trouve :

$$\frac{D}{D\xi^\mu} = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}$$

ainsi que

$$R_{\lambda\mu\rho\nu} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu,\mu\rho} - g_{\mu\nu,\lambda\rho} - g_{\lambda\rho,\mu\nu} + g_{\mu\rho,\lambda\nu}).$$

Le tenseur de Riemann encode la courbure. Or, l'expression de la courbure se manifeste *via* le fait qu'il est impossible de trouver un système de coordonnées qui annule la totalité des dérivées secondes du tenseur métrique. Il est donc naturel que le tenseur de Riemann, mesurant la courbure, implique les dérivées secondes de la métrique.

2. (a) Nous donnons ici l'exemple de la première égalité. Les autres égalités se démontrent par une procédure identique. On note que

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\rho\nu} &= \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu,\mu\rho} - g_{\mu\nu,\lambda\rho} - g_{\lambda\rho,\mu\nu} + g_{\mu\rho,\lambda\nu}), \\ R_{\rho\nu\lambda\mu} &= \frac{1}{2} (g_{\rho\mu,\nu\lambda} - g_{\nu\mu,\rho\lambda} - g_{\rho\lambda,\nu\mu} + g_{\nu\lambda,\rho\mu}). \end{aligned}$$

Puisque le tenseur métrique est symétrique, *i.e.* $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ et que l'égalité de Schwarz s'applique, *i.e.* $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$, le premier terme du membre de droite de $R_{\rho\nu\lambda\mu}$ est égal au dernier terme du membre de droite de $R_{\lambda\mu\rho\nu}$ et réciproquement. De même, les deuxième et troisième termes de $R_{\rho\nu\lambda\mu}$ sont respectivement égaux aux deuxième et troisième de $R_{\lambda\mu\rho\nu}$. On a donc bien $R_{\lambda\mu\rho\nu} = R_{\rho\nu\lambda\mu}$.

- (b) Pour démontrer ces quatre égalités, il suffit d'appliquer $g^{\lambda\rho}$ aux quatre égalités de la question (2.a).

3. (a) On veut montrer que

$$R_{\lambda\mu\rho\nu;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\rho;\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma;\rho} = 0.$$

Étape 1 : Puisque l'on travaille en P avec le système de coordonnées localement inertielles, on peut tout d'abord remplacer les dérivations covariantes par des dérivations usuelles, *i.e.*

$$R_{\lambda\mu\rho\nu;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\rho;\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma;\rho} = R_{\lambda\mu\rho\nu,\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\rho,\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma,\rho}.$$

Étape 2 : On calcule explicitement $R_{\lambda\mu\rho\nu,\sigma}$ et les permutations cycliques suivant ρ, ν et σ en fonction des dérivées troisième du tenseur métrique.

Étape 3 : On utilise les égalités de Schwarz pour montrer que

$$R_{\lambda\mu\rho\nu;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\rho;\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma;\rho} = 0.$$

- (b) La quantité $B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$ est la dérivation covariante du tenseur de Riemann : c'est donc un tenseur de rang 5. Ainsi, l'égalité $R_{\lambda\mu\rho\nu;\sigma} + R_{\lambda\mu\sigma\rho;\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma;\rho} = 0$ est une relation *tensorielle* : bien que calculée dans un système de coordonnées spécifiques, elle est toutefois vraie quel que soit le système de coordonnées. Cette identité différentielle est appelée *l'identité de Bianchi*.

4. (a) À l'aide des différentes définitions du tenseur de Ricci, on montre tout d'abord que

$$g^{\lambda\rho} B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma} = R_{\mu\nu;\sigma} - R_{\mu\sigma;\nu} + R_{\mu\nu\sigma;\rho}^\rho = 0.$$

On peut ensuite montrer que

$$g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma} = R_{;\sigma} - 2R_{\sigma;\nu}^\nu.$$

(On se souviendra ici que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle.)

- (b) On cherche à prouver que $g_{\sigma\mu} G_{;\nu}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma}$. Puisque la dérivée covariante du tenseur métrique est donc nulle, on montre tout d'abord que :

$$G_{;\nu}^{\mu\nu} = R_{;\mu}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{;\nu}.$$

On montre ensuite que

$$\begin{aligned} g_{\sigma\mu} G_{;\nu}^{\mu\nu} &= g_{\sigma\mu} R_{;\nu}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\sigma\mu} g^{\mu\nu} R_{;\nu} \\ &= \left(g_{\sigma\mu} R^{\mu\nu} \right)_{;\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\sigma}^{\nu} R_{;\nu} \\ &= R_{\sigma;\nu}^\nu - \frac{1}{2} R_{;\sigma}. \end{aligned}$$

- (c) Puisque $B_{\lambda\mu\rho\nu\sigma} = 0$, on en déduit que $g_{\sigma\mu} G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$. Ce qui équivaut à $G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$; une conséquence directe de l'identité de Bianchi.
- (d) L'écriture $G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ impose 4 contraintes supplémentaires ($\mu = 0, 1, 2$ et 3) systématiquement vérifiées par le tenseur d'Einstein. Ces 4 contraintes correspondent au fait que la théorie ne dépend pas du choix du système de coordonnées.

Ce chapitre entend montrer comment les équations de champ d'Einstein, nommées alors équations de Friedmann-Lemaître, s'écrivent pour l'Univers en tant que système homogène et isotrope. Quelques solutions simples sont obtenues dans des cas particuliers. Il n'est pas ici question d'une introduction exhaustive à la cosmologie mais simplement de comprendre comment la relativité générale permet de transfigurer cette discipline.

La cosmologie est la science de l'Univers dans son ensemble. Non pas de ses constituants mais de l'Univers lui-même, en tant qu'entité physique. La relativité générale est, dans l'état actuel de nos connaissances-constructions, le moyen le plus signifiant pour accéder à une cosmologie physique. L'expansion de l'Univers n'est pas une expansion *dans* l'espace mais une extension *de* l'espace : ceci est impensable dans un cadre newtonien et requiert la vision einsteinienne.

6.1 MÉTRIQUE FLRW

6.1.1 Les bases de la cosmologie

La cosmologie est une science bien singulière, pour au moins cinq raisons :

- l'observateur fait inévitablement partie du système qu'il entend décrire alors même que tout le protocole scientifique consiste à se distancier autant que possible de l'objet d'étude ;
- l'expérience est irréproducible : la naissance de l'Univers (ou ce qui en tient lieu) ne s'est déroulée qu'une fois. Le processus d'induction consiste à observer des régularités dans la reproduction d'une expérience afin d'en inférer des lois. Comment procéder pour distinguer nécessité et contingence alors même que nous ne disposons que d'un unique échantillon d'Univers ?
- les conditions initiales y jouent un rôle spécifique. En effet, les lois physiques ne déterminent l'état final (la position d'une bille par exemple) que conséquemment à la connaissance de conditions initiales qui sont extérieures et antérieures (par exemple la manière dont l'expérimentateur a lancé la bille). Mais il n'y a ni

extériorité ni antériorité au système-univers. Le modèle peut-il générer ses propres conditions initiales ?

- les températures en jeu quand on extrapole le temps jusqu'à des valeurs très proches du Big Bang deviennent nécessairement plus grandes que ce qui a été (et vraisemblablement que ce qui sera jamais) testé sur Terre. Une extrapolation est donc indispensable ;
- enfin, c'est l'état final qui est connu (l'état actuel) et l'état initial (la physique au voisinage du Big Bang) qui est recherché. Or, précisément, la thermodynamique nous apprend qu'il n'est pas toujours anodin d'inverser le sens du temps...

Il est remarquable que malgré – ou peut-être grâce à – ces tensions et ces singularités la cosmologie soit devenue une science et même une science de précision. Sans suivre le déroulement chronologique, disons que le « modèle du Big Bang » s'est imposé grâce à un certain nombre d'indices convaincants :

- l'observation de Hubble : les galaxies s'éloignent les une des autres, en accord avec l'image d'un Univers en explosion ;
- le paradoxe d'Olbers. Si l'univers était infini et éternel, le ciel – y compris nocturne – devrait être infiniment brillant (au moins aussi brillant que le Soleil). En effet, le flux reçu en provenance d'un astre à la distance R décroît comme $1/R^2$ mais le nombre d'étoiles dans une coquille d'épaisseur dR croît comme R^2 . Ces effets se compensent et le flux total est divergent si l'intégration est menée sans borne. Quelque chose ne fonctionne pas dans un univers infini et éternel ;
- la mise en évidence d'une « évolution » : en observant, en particulier, les radiogalaxies, il apparut que l'aspect de l'Univers loin de la Terre (et donc dans le passé) n'est pas exactement semblable à ce qu'il est aujourd'hui. Ce qui, là aussi, s'accorde bien mieux avec un modèle de type Big Bang, fondamentalement évolutif, qu'avec l'image d'un univers statique et éternel ;
- la nucléosynthèse primordiale. La physique nucléaire permet de calculer les abondances relatives des éléments synthétisés dans l'univers primordial pour un modèle de type Big Bang. Ces estimations sont en très bon accord avec les mesures ;
- le fond diffus cosmologique. Environ 380 000 ans après le Big Bang, l'Univers devint suffisamment froid pour que lumière et matière se découplent (les photons n'ont plus assez d'énergie pour ioniser les atomes). On attend donc un bain de rayonnement relique portant les traces de cette époque. Celui-ci a bel et bien été observé, avec une distribution spectrale exactement conforme aux attentes et une distribution spatiale révélant de petites structures extrêmement fécondes pour mesurer les différents paramètres cosmologiques.

Beaucoup d'autres observations viennent étayer le modèle cosmologique : étude des amas de galaxies, forêt Lyman- α , cisaillement gravitationnel, oscillations acoustiques

de baryons, etc. Bien que sujet à remise en cause, comme toute proposition scientifique, le modèle standard est aujourd'hui bien établi.

Pour décrire l'Univers d'un point de vue théorique, on le suppose homogène et isotrope, constitué d'un fluide parfait. Ces hypothèses sont attrayantes parce qu'elles s'inscrivent dans le geste copernicien de « désanthropocentrisation » mais elles ne sont pas absolument évidentes. Dans l'état actuel des mesures, elles sont néanmoins très bien corroborées par les observations et peuvent donc être considérées comme légitimes.

6.1.2 Forme de la métrique

L'Univers est donc le système physique le plus « simple » en cela qu'il est extrêmement symétrique. La métrique associée à l'Univers dans son ensemble est sans doute la plus élémentaire à établir. L'espace-temps le plus symétrique qui soit est celui de Minkowski. Mais il ne permet pas une évolution temporelle. Tentons donc de décrire le Cosmos en autorisant une telle dépendance. On suppose ainsi un univers *spatialement* homogène et isotrope mais éventuellement variable avec le temps dans sa structure. Du point de vue de la relativité générale, cela signifie que l'on peut procéder à une foliation de l'Univers en feuilletés d'espace tels que la métrique spatiale soit maximale symétrique. Autrement dit, on considère que notre espace-temps est décrit par $\mathbb{R} \times \Sigma$ où $\mathbb{R}$ représente la direction temporelle et Σ est une variété (*manifold*) maximale symétrique à trois dimensions. La métrique s'écrit donc :

$$ds^2 = dt^2 - dl^2. \quad (6.1)$$

Le fait que la partie spatiale soit ainsi « découplée » de la partie temporelle est une conséquence directe de la forme $\mathbb{R} \times \Sigma$ qui est supposée par construction du modèle. Le fait que le terme temporel s'écrive dt^2 et non pas $g_{00}dt^2$ vient simplement de ce qu'on *choisit* la variable temps pour qu'il en soit ainsi. C'est la définition du temps cosmique : le temps qui serait mesuré par des horloges *comobiles*, c'est-à-dire fixes suivant la partie spatiale de la métrique (6.1).

Considérons une feuille tridimensionnelle (hypersurface) prise dans l'espace-temps au temps t . Par hypothèse, elle doit être homogène et isotrope. La courbure de toutes les géodésiques est donc la même (mais peut dépendre du temps), notons-la $K(t) = k/a^2(t)$ où $a^2(t)$ donne l'amplitude et $k = (-1, 0, +1)$ donne le signe. Une surface courbée positivement ($k = +1$) est l'analogue tridimensionnel d'une sphère : une hypersphère (qui n'est pas une boule !). Commençons par traiter ce cas, le plus simple intuitivement. Cette hypersphère peut être immergée dans un espace quadridimensionnel euclidien E_4 , de la même façon qu'une sphère peut être incluse dans l'espace tridimensionnel usuel E_3 . Soient x, y, z, u les coordonnées cartésiennes dans E_4 avec x, y, z les coordonnées spatiales habituelles de E_3 . L'hypersurface a pour équation

(c'est l'analogue immédiat pour une 3-sphère de ce qu'on sait d'une 2-sphère) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2(t), \quad (6.2)$$

soit, avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$r^2 + u^2 = a^2(t). \quad (6.3)$$

En différenciant cette relation à $t = cte$, on obtient :

$$2rdr + 2udu = 0. \quad (6.4)$$

Ce qui conduit à

$$u^2 du^2 = r^2 dr^2. \quad (6.5)$$

Donc :

$$du^2 = \frac{r^2 dr^2}{u^2} = \frac{r^2 dr^2}{a^2(t) - r^2}. \quad (6.6)$$

La séparation de deux points proches sur l'hypersurface est donnée (exactement comme pour les coordonnées sphériques habituelles) par :

$$dl^2 = dr^2 + du^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.7)$$

où $d\Omega$ est l'élément d'angle solide. Soit, en vertu de (6.6) :

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2(t) - r^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (6.8)$$

Ce qui, en mettant au même dénominateur, s'écrit :

$$dl^2 = \frac{a^2(t)dr^2}{a^2(t) - r^2} + r^2 d\Omega^2 = \frac{a^2(t)dr^2}{a^2(t) - r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (6.9)$$

Une variation de $d\theta$ de la coordonnée θ entraîne un « déplacement » de $r d\theta$. Mais une variation de dr de la coordonnée r entraîne un « déplacement » de $a(t)dr / \sqrt{a^2(t) - r^2}$. Ceci montre que la 3-surface est *courbée*. Si on introduit $\sigma \equiv r/a(t)$, l'équation (6.9) se réécrit :

$$dl^2 = a^2(t) \left(\frac{d\sigma^2}{1 - \sigma^2} + \sigma^2 d\Omega^2 \right). \quad (6.10)$$

Si l'on écrit la métrique totale et non plus seulement la partie spatiale, on obtient donc :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{d\sigma^2}{1 - \sigma^2} + \sigma^2 d\Omega^2 \right). \quad (6.11)$$

Si, enfin, on considère les différents signes possibles de la courbure et non plus seulement le cas $k = +1$, la métrique s'écrit :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 d\Omega^2 \right). \quad (6.12)$$

C'est la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Il est intéressant que nous ayons pu établir très rapidement la forme de cette métrique, uniquement à partir des symétries. Elle est entièrement déterminée par celles-ci sauf pour l'unique fonction inconnue $a(t)$. C'est en utilisant les équations d'Einstein que nous pourrions la déterminer. Évidemment, cette fonction contient toute l'information non triviale.

On voit tout de suite qu'un point de coordonnées spatiales fixes vérifie bien l'équation géodésique. En effet, $\frac{dx^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$ puisque, précisément, ses coordonnées ne varient pas. Par ailleurs, $\Gamma_{i00} = \frac{1}{2}(g_{0i,0} - g_{00,i} + g_{i0,0})$. Le premier et le troisième termes de cette dernière relation sont nuls car $g_{\mu\nu}$ est diagonale (c'est une conséquence immédiate de l'isotropie) tandis que le second est nul puisque $g_{00} = \text{cte}$. Donc $\Gamma_{00}^i = 0$. L'équation géodésique

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (6.13)$$

est donc bien satisfaite. Le premier terme est effectivement nul et le second l'est aussi : pour $(\mu, \nu) = (0, 0)$, le coefficient de connexion est nul d'après ce qui vient d'être dit et pour $(\mu, \nu) = (i, j)$ ce sont les termes $\frac{dx^i}{ds}$ qui le sont. Les objets comobiles sont bien « en chute libre ». Par ailleurs, pour un point de coordonnées spatiales fixes, la métrique se réduit à $ds^2 = dt^2$, ce qui montre bien que le temps cosmique est le temps propre.

Il est donc légitime de nommer les coordonnées σ, θ, φ , *coordonnées comobiles*. Tout objet pour lequel les effets locaux (par exemple attraction d'une autre galaxie voisine) sont faibles, est comobile. Un observateur dans un référentiel comobile (ayant des coordonnées comobiles constantes) voit toutes les galaxies s'éloigner de lui de manière isotrope.

Dans la métrique FLRW, $a(t)$ se nomme facteur d'échelle et il n'a le sens d'un hyper-rayon que dans le cas $k = +1$. Il est intéressant de se familiariser avec cette géométrie sur un exemple simple. Considérons un référentiel centré sur la Terre, c'est-à-dire tel qu'elle y ait les coordonnées $(0,0,0)$. Choisissons les axes de façon qu'un objet donné ait pour coordonnées $(\sigma, 0, 0)$ (on oriente correctement le repère). La distance, sur l'hypersurface, jusqu'à cet objet s'écrit :

$$d = a(t) \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 - k\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.14)$$

Si $k = +1$, on obtient donc

$$d = a(t) \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}}} = a(t) \arcsin(\sigma). \quad (6.15)$$

Si l'on dessine par la pensée une sphère centrée sur la Terre et passant par l'objet lointain, son aire est

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi a^2(t) \sigma^2 = 4\pi a^2(t) \sin^2\left(\frac{d}{a(t)}\right). \quad (6.16)$$

Le fait que l'aire s'écrive bien $4\pi r^2$ se voit immédiatement dans (6.9) en regardant la métrique à r et φ constants. L'équation (6.16) montre donc que quand d augmente de 0 à $a(t)\pi/2$, l'aire de la sphère augmente elle aussi. Puis, quand d augmente encore, jusqu'à $a(t)\pi$, l'aire diminue jusqu'à 0 ! Après quoi, elle augmente à nouveau... Bien qu'en apparence très paradoxal, on peut aisément comprendre cet état de fait par une analogie bidimensionnelle. Partons du pôle d'une sphère et évaluons la longueur d'un cercle de latitude. Au fur et à mesure qu'on s'approche de l'équateur, celle-ci augmente. Mais, une fois l'équateur passé, elle diminue à nouveau jusqu'à l'antipode (qui correspond à $d = a(t)\pi$ dans la métrique FLRW) où elle s'annule. La géométrie d'un Univers à $k = +1$ est donc bien éloignée de celle d'un monde euclidien... La présence de courbure nous invite à revoir fondamentalement nos intuitions. On peut, par exemple, comprendre maintenant pourquoi l'Univers peut être de taille « finie » mais sans bord. Et, là aussi, l'analogie bidimensionnelle est précieuse : si l'on se déplace à la surface d'une sphère, on voit bien que l'aire est finie et, pourtant, il n'y a aucun bord. On ne « tombe » jamais hors de la sphère. Il est primordial de bien comprendre que dans cette analogie, le monde *est* la sphère et uniquement la sphère. Son intérieur et son extérieur « n'existent » pas : on ne les voit intuitivement que parce qu'on a immergé cet espace à 2 dimensions dans l'espace euclidien à 3 dimensions. L'exemple permet d'ailleurs de comprendre pourquoi l'Univers n'a pas de centre et pourquoi le Big Bang n'a pas eu lieu « quelque part ». Ou est le centre d'une sphère quand on reste sur celle-ci, quand le monde est la surface de la 2-sphère ? Il n'y en a évidemment pas, tous les points sur la sphère jouent des rôles équivalents. De même, si l'on pense à un ballon de baudruche en train d'être gonflé à la surface duquel des points dessinés représenteraient les galaxies¹, on voit que le Big Bang, qui correspond au moment où la taille du ballon était nulle ou quasi nulle, a bien lieu « partout en même temps » et non pas en point particulier du ballon.

1. Cette image est infiniment préférable à celle, trop répandue, des raisins figurant les galaxies dans un *Panettone* gonflant dans le four. En effet, dans la métaphore du gâteau, on ne peut rendre compte de la courbure.

Si $k = -1$, on obtient de même :

$$d = a(t) \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}} = a(t) \operatorname{arcsinh}(\sigma). \quad (6.17)$$

En reprenant le raisonnement précédent, on trouve cette fois :

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi a^2(t) \sigma^2 = 4\pi a^2(t) \sinh^2\left(\frac{d}{a(t)}\right). \quad (6.18)$$

La fonction est, dans ce cas, monotone.

Enfin, le cas $k = 0$ correspond à un univers « plat » où $d = a(t)\sigma$.

6.2 ÉQUATIONS DE FRIEDMANN-LEMAÎTRE

La métrique FLRW est riche d'informations et permet déjà de sentir combien la relativité générale enrichit et améliore notre compréhension de l'Univers. C'est la trame spatiale elle-même qui devient génériquement dynamique, sujette à une évolution. Cette découverte théorique, conjointement aux observations mentionnées au paragraphe précédent sont les bases du modèle cosmologique. Néanmoins, pour décrire quantitativement l'évolution de l'Univers, il faut connaître cette fonction $a(t)$. C'est elle qui encode toute l'information dynamique qui ne peut être directement extraite des symétries supposées. Pour ce faire, il faut résoudre les équations d'Einstein liant le tenseur énergie-impulsion au tenseur d'Einstein.

6.2.1 Tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait

Pour un gaz idéal de particules sans interactions, dans le référentiel de Lorentz comobile, le tenseur énergie-impulsion s'écrit :

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Cette forme découle directement des symétries. On trouve bien la densité d'énergie pour la composante (00) : en unités naturelles ρ signifie ρc^2 et, dans le référentiel comobile, l'énergie est égale à l'énergie de masse. La matrice est purement diagonale avec $p_x = p_y = p_z$ car le fluide est parfait et isotrope (par hypothèse). Par ailleurs, la quadrivitesse (dont les composantes sont, par définition, $\gamma, \gamma\dot{x}, \gamma\dot{y}, \gamma\dot{z}$) s'écrit ici :

$$u^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Donc $u^\mu u^\nu$ s'écrit :

$$u^\mu u^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

On voit ainsi immédiatement que le tenseur $T_{\mu\nu}$ donné à l'équation (6.19) peut s'écrire sous la forme :

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (6.22)$$

avec

$$pg_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

à la limite minkowskienne (voir exercice 5.1). L'équation (6.22) est une équation tensorielle, qui peut donc être utilisée dans d'autres référentiels. C'est une forme qui sera utile par la suite.

6.2.2 Remarque sur les métriques diagonales

Il est utile d'établir une petite propriété préliminaire concernant les métriques diagonales. D'une façon générale, pour un tenseur de rang 2 quelconque, $A_{\beta\alpha} = g_{\beta\nu}g_{\alpha\mu}A^{\mu\nu}$. Si on applique cela au tenseur métrique, on obtient donc $g_{\beta\alpha} = g_{\beta\nu}g_{\alpha\mu}g^{\mu\nu}$. De façon très exceptionnelle, nous écrivons explicitement les sommations dans les lignes qui suivent. La formule précédente donne :

$$g_{\alpha\alpha} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\alpha\mu}g_{\alpha\nu}g^{\mu\nu}. \quad (6.24)$$

Si la métrique est diagonale ($g_{\alpha\mu} = 0$ pour $\alpha \neq \mu$), on obtient donc

$$g_{\alpha\alpha} = \sum_{\nu=0}^3 g_{\alpha\alpha}g_{\alpha\nu}g^{\alpha\nu}, \quad (6.25)$$

et donc, pour la même raison :

$$g_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}g_{\alpha\alpha}g^{\alpha\alpha}. \quad (6.26)$$

Attention, dans les formules précédentes, et ce sont presque les seules exceptions de ce livre, il n'y a *pas* de sommation implicite sur les indices répétés (c'est pourquoi nous avons explicitement écrit les sommes). On en déduit donc :

$$g_{\alpha\alpha} = \frac{1}{g^{\alpha\alpha}}. \quad (6.27)$$

6.2.3 Tenseur énergie-impulsion de l'Univers

D'après la relation (6.12), la métrique FLRW s'écrit en développant le terme d'angle solide :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} \right) - a^2(t) \sigma^2 d\theta^2 - a^2(t) \sigma^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (6.28)$$

Étant donné que $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, on peut lire directement les valeurs de $g_{\mu\nu}$, exprimées dans le système de coordonnées $(t, \sigma, \theta, \varphi)$, à partir de la (6.28) :

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = 1, \quad (6.29)$$

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = \frac{-a^2(t)}{1 - k\sigma^2}, \quad (6.30)$$

$$g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = -a^2(t) \sigma^2, \quad (6.31)$$

$$g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = -a^2(t) \sigma^2 \sin^2 \theta, \quad (6.32)$$

où l'on a aussi utilisé (6.27). Dans le référentiel comobile, la quadrivitesse s'écrit $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. En appliquant (6.22), on obtient donc :

$$T_{00} = (p + \rho) u_0 u_0 - p g_{00} = \rho, \quad (6.33)$$

$$T_{11} = (p + \rho) u_1 u_1 - p g_{11} = \frac{p a^2(t)}{1 - k\sigma^2}, \quad (6.34)$$

$$T_{22} = (p + \rho) u_2 u_2 - p g_{22} = p a^2(t) \sigma^2, \quad (6.35)$$

$$T_{33} = (p + \rho) u_3 u_3 - p g_{33} = p a^2(t) \sigma^2 \sin^2 \theta. \quad (6.36)$$

6.2.4 Tenseur d'Einstein de l'Univers

Le tenseur $T_{\mu\nu}$ est maintenant établi en fonction des propriétés du fluide cosmique. Avant de résoudre les équations d'Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ et trouver la fonction $a(t)$, reste donc à exprimer le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ en fonction de la métrique. Nous donnons ici les grandes lignes de cette démarche sans mener explicitement les calculs de toutes les composantes. Notre but est de « démystifier » ces calculs afin que le lecteur en comprenne bien toutes les étapes.

Le tenseur d'Einstein s'écrit en fonction du tenseur de Riemann qui s'écrit en fonction des coefficients de connexion. Il faut donc trouver ces derniers en fonction des éléments de la métrique. Évaluons, pour commencer, Γ_{01}^1 :

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = g^{11} \Gamma_{110} = \frac{1}{2} g^{11} [g_{11,0} - g_{01,1} + g_{10,1}], \quad (6.37)$$

où les deux premières égalités découlent directement de ce qui a été vu au chapitre 4 et la troisième de l'expression générale $\Gamma_{\nu\mu\rho} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\rho} - g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu})$. Étant donné que $g_{01,1} = g_{10,1} = 0$, car la métrique est diagonale, on obtient en dérivant explicitement g_{11} par rapport au temps :

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - k\sigma^2}{-a^2(t)} \right) \left(\frac{-2a(t)\dot{a}(t)}{1 - k\sigma^2} \right) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (6.38)$$

Nous utilisons la notation suivante : $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ avec f une fonction quelconque dépendant du temps. Or, en utilisant l'expression (5.9) du chapitre 5, on peut écrire :

$$R_{010}^1 = \Gamma_{00,1}^1 - \Gamma_{01,0}^1 + \Gamma_{\mu 1}^1 \Gamma_{00}^\mu - \Gamma_{\mu 0}^1 \Gamma_{01}^\mu. \quad (6.39)$$

Le premier et le troisième termes de cette somme sont nuls. En effet,

$$\Gamma_{\mu 0}^1 = \frac{1}{2}(g_{0\mu,0} - g_{00,\mu} + g_{\mu 0,0}). \quad (6.40)$$

Étant donnée que la métrique est diagonale et que $g_{00} = 1$, on voit immédiatement que tous les termes de cette somme sont nuls (soit les coefficients métriques sont nuls, soit ils sont constants et donc de dérivée nulle). L'expression (6.39) s'écrit donc :

$$R_{010}^1 = -\Gamma_{01,0}^1 - \Gamma_{\mu 0}^1 \Gamma_{01}^\mu. \quad (6.41)$$

Pour $\mu = 0$, $\Gamma_{\mu 0}^1 = 0$ comme on l'a montré précédemment. Pour $\mu = 2$,

$$\Gamma_{\mu 0}^1 = \Gamma_{20}^1 = g^{22} \Gamma_{120} = \frac{1}{2} g^{22} (g_{21,0} - g_{02,1} + g_{10,2}). \quad (6.42)$$

Clairement, les trois termes de cette somme sont nuls puisque la métrique est diagonale. De même pour $\mu = 3$. Le seul terme non nul de la sommation sur μ est donc celui pour lequel $\mu = 1$. L'expression (6.39) s'écrit ainsi :

$$R_{010}^1 = -\Gamma_{01,0}^1 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^1. \quad (6.43)$$

Soit, en utilisant (6.38) :

$$R_{010}^1 = - \left(\frac{\ddot{a}(t)a(t) - \dot{a}(t)\dot{a}(t)}{a^2(t)} \right) - \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \quad (6.44)$$

Suivant un raisonnement exactement identique, on trouve que :

$$R_{020}^2 = R_{030}^3 = - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad (6.45)$$

et $R_{00}^0 = 0$. D'où :

$$R_{00} \equiv R_{0\mu 0}^\mu = -\frac{3\ddot{a}(t)}{a(t)}. \quad (6.46)$$

Suivant une démarche analogue, on peut montrer que les seules autres composantes non nulles sont R_{11} , R_{22} et R_{33} et valent :

$$R_{11} = \frac{2k + a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t)}{1 - k\sigma^2}, \quad (6.47)$$

$$R_{22} = (2k + a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t))\sigma^2, \quad (6.48)$$

$$R_{33} = (2k + a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t))\sigma^2 \sin^2\theta. \quad (6.49)$$

Reste maintenant, avant de pouvoir écrire le tenseur d'Einstein, à calculer le scalaire de Ricci R :

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}, \quad (6.50)$$

puisque la métrique est diagonale. Soit, en remplaçant chaque terme par ce qui vient d'être calculé, et en simplifiant :

$$R = -\frac{6}{a^2(t)}(k + a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)). \quad (6.51)$$

La composante (00) du tenseur d'Einstein vaut donc, en utilisant (6.46) et (6.50) :

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = -3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{-6}{a^2(t)}\right)(k + a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)) \quad (6.52)$$

$$= \frac{3k}{a^2(t)} + \frac{3\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}. \quad (6.53)$$

De même, après quelques simplifications élémentaires :

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = -\frac{k + 2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{1 - k\sigma^2}. \quad (6.54)$$

En écrivant explicitement les termes, il est aisé de montrer que $G_{22} = G_{33} = 0$.

Les différentes composantes du tenseur d'Einstein et du tenseur énergie-impulsion étant connues, il est maintenant possible d'écrire explicitement les équations d'Einstein.

6.2.5 Équations de Friedmann-Lemaître

Les équations d'Einstein avec constante cosmologique s'écrivent, conformément à la formule (5.58) du chapitre 5, $G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$. Chacun des termes de cette

équation a été calculé dans les paragraphes précédents. La composante (00) s'écrit ainsi :

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2(t)} + \frac{3k}{a^2(t)} - \Lambda = 8\pi G\rho. \quad (6.55)$$

C'est la première équation de Friedmann. La composante (11) conduit à :

$$-\frac{k + 2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)}{1 - k\sigma^2} - \Lambda \left(\frac{-a^2(t)}{1 - k\sigma^2} \right) = 8G\pi \frac{pa^2(t)}{1 - k\sigma^2}. \quad (6.56)$$

En simplifiant par $(1 - k\sigma^2)$ et en multipliant par $1/a^2(t)$, on obtient :

$$-\frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{k}{a^2(t)} + \Lambda = 8\pi Gp. \quad (6.57)$$

C'est la seconde équation de Friedmann. Les expressions (6.55) et (6.57) constituent les équations de Friedmann-Lemaître. Ce sont elles qui permettent de trouver comment évolue le facteur d'échelle de l'Univers $a(t)$. Elles découlent simplement des équations d'Einstein. Ce qui est tout à fait naturel puisque les équations d'Einstein sont, au niveau technique, la machinerie permettant de trouver la métrique et que le facteur d'échelle est, justement, le seul ingrédient de la métrique FLRW non déterminé par les symétries.

D'un point de vue intuitif, le facteur d'échelle n'est pas à interpréter (en tout cas pas dans les cas $k = 0$ ou $k = -1$) comme la « taille » de l'Univers. Il représente plutôt l'évolution de la séparation relative de deux points. Si, au cours de l'évolution cosmologique, le facteur d'échelle de l'Univers augmente d'un facteur x , cela signifie que deux points comobiles verront également leur distance augmenter de ce même facteur x . Quand on évoque ainsi l'Univers primordial, caractérisé par un « petit » facteur d'échelle, ça ne signifie pas (nécessairement) que l'Univers lui-même est petit. Ça signifie que des points aujourd'hui distants étaient alors proches. Il n'y a donc rien de paradoxale à ce que l'Univers puisse être infini (et ce à tout instant) bien qu'en expansion. L'expansion réfère à l'accroissement du facteur d'échelle, mais cet accroissement n'est nullement incompatible avec l'infinitude (ni, évidemment, avec la finitude) de l'Univers lui-même. Un plan infini peut voir tous les points qui y sont dessinés s'éloigner ou se rapprocher les uns des autres sans cesser d'être infini. Le facteur d'échelle doit être pensé en termes *relatifs* : l'évolution relative du facteur d'échelle renseigne sur l'évolution relative des points d'univers comobiles.

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que les équations de Friedmann font intervenir l'équation d'état du fluide cosmique. Il faut connaître $p(\rho)$ pour trouver l'évolution du facteur d'échelle : la densité n'est pas le seul paramètre dictant l'évolution. La nature « microscopique » de ce qui compose l'Univers influe sur sa dynamique.

Il est possible de donner une interprétation simple des équations de Friedmann à la limite newtonienne. Considérons un univers de matière non relativiste ($p = 0$) et sans constante cosmologique $\Lambda = 0$. Soit une surface sphérique comobile de rayon $\sigma a(t)$ dans le fluide cosmique. La vitesse s'écrit $V = \sigma \dot{a}(t)$ et donc l'énergie cinétique, par unité de masse, $\frac{1}{2}\sigma^2 \dot{a}^2(t)$. L'énergie gravitationnelle de cette masse unité, due à la présence de masse à l'intérieur de la coquille sphérique, s'écrit quant à elle $-\frac{4}{3}\pi G \rho a^2(t) \sigma^2$. On obtient cette expression immédiatement par analogie avec $-GM/r$ où, ici, $\frac{4}{3}\pi(\sigma a(t))^3 \rho$ joue le rôle de M et $\sigma a(t)$ joue le rôle de r . L'énergie totale étant conservée, posons cette constante égale à $-\sigma^2 k/2$:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \dot{a}^2(t) - \frac{4}{3}\pi G \rho a^2(t) \sigma^2 = -\frac{\sigma^2 k}{2}. \quad (6.58)$$

En multipliant cela par $6/(\sigma^2 a^2(t))$, on obtient :

$$3 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + 3 \frac{k}{a^2(t)} = 8\pi G \rho, \quad (6.59)$$

c'est-à-dire la première équation de Friedmann. Pour la retrouver, il a fallu poser que la constante était égale à $-\sigma^2 k/2$, ce qui montre que le signe de $-k$ est celui de l'énergie totale.

D'autre part, multiplions la première équation de Friedmann (6.55) par $a^3(t)$ et dérivons-la par rapport au temps cosmique. On obtient :

$$6a(t)\dot{a}(t)\ddot{a}(t) + 3\dot{a}^3(t) + 3k\dot{a}(t) = \frac{d}{dt}(8\pi G \rho a^3(t)). \quad (6.60)$$

Soit :

$$3a^2(t)\dot{a}(t) \left(2 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)} \right) = \frac{d}{dt}(8\pi G \rho a^3(t)). \quad (6.61)$$

Or, pour un univers sans constante cosmologique et composé de poussière ($p = 0$), la seconde équation de Friedmann (6.57) dit exactement que le membre de gauche de (6.61) est nul. Donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi G \rho a^3(t) \right) = 0. \quad (6.62)$$

Autrement dit : la masse $\frac{4}{3}\pi \rho a^3$ dans le volume comobile ne change pas. À la limite classique, les équations de Friedmann traduisent donc la continuité et la conservation de l'énergie.

Avant de chercher explicitement quelques solutions cosmologiques, il est utile de réécrire les équations de Friedmann sous une autre forme. En dérivant la première équation de Friedmann (6.55) et en réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{6a(t)\dot{a}(t)\ddot{a}(t) - 6\dot{a}^3 - 6k\dot{a}}{8\pi G a^3(t)} = \dot{\rho}. \quad (6.63)$$

Par ailleurs, en multipliant la seconde équation de Friedmann (6.57) par $3\dot{a}/(8\pi G a(t))$, on obtient :

$$\frac{-6a(t)\dot{a}(t)\ddot{a}(t) - 3\dot{a}^3(t) - 3k\dot{a}(t)}{8\pi G a^3(t)} + \frac{3\Lambda\dot{a}}{8\pi G a(t)} = \frac{3\dot{a}p}{a(t)}. \quad (6.64)$$

En formant (6.63)+(6.64), on trouve :

$$\dot{\rho} + \frac{3p\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{-3\dot{a}(t)}{8\pi G a(t)} \left(\frac{3\dot{a}^2 + 3k}{a^2(t)} - \Lambda \right). \quad (6.65)$$

En utilisant la première équation de Friedmann (6.55), on reconnaît que le membre entre parenthèses vaut $8\pi G\rho$. Ce qui conduit à :

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (6.66)$$

où on a introduit le paramètre de Hubble $H \equiv \dot{a}(t)/a$. Ce paramètre H mesure le « taux d'expansion » de l'Univers. Il est aujourd'hui estimé à environ $75 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$. L'inverse de H est homogène à un temps et donne directement l'âge de l'Univers si l'expansion s'est effectuée à un rythme constant. Bien que cette dernière hypothèse soit tout à fait fausse, H^{-1} donne néanmoins un ordre de grandeur correcte de l'âge de l'Univers aujourd'hui estimé par des méthodes plus précises à 13,7 milliards d'années. L'équation (6.66) peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3(t)) + p \frac{d}{dt}(a^3(t)) = 0. \quad (6.67)$$

En développant les dérivations et en divisant par $a^3(t)$, on voit immédiatement que cette équation est équivalente à (6.66). Nommons (6.67) la nouvelle seconde équation de Friedmann. En multipliant la première équation de Friedmann (6.55) par $a^2(t)/3$, on obtient :

$$\left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho a^2(t)}{3} - k + \frac{\Lambda a^2(t)}{3}. \quad (6.68)$$

Nommons cette dernière écriture la nouvelle première équation de Friedmann.

Quelle que soit la manière dont on les écrit (à choisir suivant les circonstances), les équations de Friedmann-Lemaître permettent d'inférer la dynamique de l'Univers à partir de son contenu matériel. Comme nous l'évoquions précédemment, il apparaît ici clairement que l'expansion de l'Univers est une expansion *de* l'espace et non pas *dans* l'espace. La forme des cases de notre échiquier cosmologique évolue non seulement en fonction de la position des pièces mais aussi en fonction du temps.

6.3 DYNAMIQUE COSMOLOGIQUE

6.3.1 Définitions

Avec $(\frac{da(t)}{dt})^2 = a^2(t)H^2$ (par définition de H), la nouvelle première équation de Friedmann (6.68) peut se réécrire :

$$-k = a^2(t)H^2 \left(1 - \frac{8\pi G\rho}{3H^2} - \frac{\Lambda}{3H^2} \right), \quad (6.69)$$

où ρ représente la densité de toutes les contributions au contenu de l'Univers. Pour simplifier l'écriture, nous notons le paramètre de Hubble H mais il est bien, comme le facteur d'échelle et la densité, une fonction du temps. Si l'on nomme souvent H la « constante » de Hubble, c'est évidemment en un sens spatial et non temporel.

Si $k = 0$, on obtient donc

$$\frac{8\pi G\rho}{3H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} = 1. \quad (6.70)$$

Soit encore :

$$\rho + \rho_\Lambda = \rho_c, \quad (6.71)$$

où l'on a posé $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$ la « densité effective » associée à la constante cosmologique et $\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$. Cette dernière grandeur, nommée *densité critique* est particulièrement importante. En effet, en appelant $\rho_{\text{tot}} = \rho + \rho_\Lambda$:

$$k = 0 \iff \rho_{\text{tot}} = \rho_c \quad (6.72)$$

$$k = -1 \iff \rho_{\text{tot}} < \rho_c \quad (6.73)$$

$$k = +1 \iff \rho_{\text{tot}} > \rho_c. \quad (6.74)$$

La valeur de la densité « réelle » ρ_{tot} dicte donc le signe de la courbure de l'Univers. Si ρ_{tot} est inférieur à la densité critique ρ_c , la courbure est négative (univers hyperbolique), si ρ_{tot} est supérieur à la densité critique, la courbure est positive (univers sphérique), Si ρ_{tot} est égal à la densité critique, la courbure est nulle (univers euclidien). Ces relations sont un exemple de plus du lien indéfectible entre contenu et géométrie en relativité générale.

Soit $\Omega_M \equiv \rho_M/\rho_c$ la densité de matière normalisée à la densité critique, $\Omega_R \equiv \rho_R/\rho_c$ la densité de rayonnement normalisée à la densité critique et $\Omega_\Lambda \equiv \rho_\Lambda/\rho_c$ la densité « effective » de constante cosmologique normalisée à la densité critique. La nouvelle première équation de Friedmann (6.68) s'écrit alors :

$$-k = a^2(t)H^2(1 - \Omega_M - \Omega_R - \Omega_\Lambda) = a^2(t)H^2(1 - \Omega_{\text{tot}}), \quad (6.75)$$

où $\Omega_{\text{tot}} \equiv \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda$. La valeur relative de Ω_{tot} , c'est-à-dire de la densité totale normalisée de l'Univers, par rapport à 1 détermine donc la courbure. Aujourd'hui, les

observations conduisent à une valeur mesurée très proche de 1. Aucune des trois géométries possibles n'est donc, à l'heure actuelle, expérimentalement exclue. Il n'est évidemment pas fortuit que la valeur mesurée soit proche de 1 : une explication possible sera donnée dans la section suivante.

6.3.2 Quelques solutions des équations de Friedmann

Étudions d'abord le cas $p = k = \Lambda = 0$, ce qu'on nomme un univers d'Einstein-de Sitter. Il correspond typiquement à de la matière non relativiste ($p/\rho \ll 1$), dans un espace de courbure nulle et sans constante cosmologique. On a alors :

$$\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho a^2(t)}{3}. \quad (6.76)$$

Or, on a montré, dans l'interprétation des équations de Friedmann, que $\rho a^3(t) = cte$ et donc $\rho a^3(t) = \rho_0 a_0^3$ à un instant quelconque. Soit

$$\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G a^2(t)}{3} \times \frac{\rho_0 a_0^3}{a^3(t)}. \quad (6.77)$$

Ce qui s'écrit encore

$$a^{\frac{1}{2}} da = \left(\frac{8}{3}\pi G\rho_0 a_0^3\right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (6.78)$$

L'équation étant maintenant à variables séparées, elle s'intègre trivialement et conduit à :

$$a(t) = \left(6\pi G\rho_0 a_0^3\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}, \quad (6.79)$$

où l'on a choisi $a(0) = 0$. Ce choix est en fait sans aucune importance car quelle que soit la constante d'intégration choisie, il existe un temps auquel le facteur d'échelle s'annule : on décide de l'appeler $t = 0$. On vient donc de montrer que pour un univers de ce type, le facteur d'échelle croît comme la puissance $2/3$ du temps : l'espace est bel et bien dynamique et en expansion ! Les équations d'Einstein, retranscrites sous la forme des équations de Friedmann, permettent bien de calculer l'évolution cosmologique. Manifestement, la solution n'est *pas* un Univers statique et immuable.

Avec $\rho a^3(t) = \rho_0 a_0^3$, on a donc :

$$a(t) = \left(6\pi G\rho a^3(t)\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \implies 1 = (6\pi G\rho)t^2 \implies \rho = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (6.80)$$

La densité diverge donc à $t = 0$. L'existence de telles singularités (dont on peut évidemment donner des définitions beaucoup plus précises en relativité générale, en particulier à partir du tenseur de Riemann) est avérée par d'importants théorèmes

de physique mathématique. Elles ne sont pas absolument inévitables en cosmologie mais leur apparition dans une très large gamme de cas a été démontrée.

Par ailleurs (6.79) conduit à $\frac{da(t)}{dt} \propto t^{-\frac{1}{3}}$, qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini : la croissance du facteur d'échelle décélère.

Il est également intéressant de noter que même si l'on considère un univers de courbure non nulle, le terme associé à la courbure sera nécessairement sous-dominant par rapport à $8\pi G\rho a^2(t)/3$ quand $t \rightarrow 0$. Autrement dit, tout univers de poussière, même pour $k \neq 0$ se comporte comme un univers de type Einstein-de Sitter au voisinage du Big Bang.

Étudions à présent le cas d'un univers sphérique sans constante cosmologique : $p = \Lambda = 0$, $k = 1$. La nouvelle première équation de Friedmann (6.68) s'écrit :

$$\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho a^2(t)}{3} - 1. \quad (6.81)$$

Cette fois, il existe un facteur d'échelle maximum $a_{\max}$ auquel l'expansion s'arrête ($\frac{da}{dt}(a_{\max}) = 0$). En utilisant $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$ (l'indice 0 réfère usuellement aux quantités mesurées aujourd'hui), on obtient immédiatement :

$$a_{\max} = \frac{8}{3}\pi G\rho_0 a_0^3. \quad (6.82)$$

Il est plus parlant de réexprimer cela en fonction des quantités mesurables. Pour $k = 1$, l'expression (6.75) s'écrit du point de vue des quantités « aujourd'hui » :

$$1 = a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1), \quad (6.83)$$

où Ω_0 est la densité totale de l'univers contemporain normalisée à la densité critique. En utilisant $\Omega_0 = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}$ pour éliminer ρ_0 dans (6.82), on obtient :

$$a_{\max} = H_0^2 \Omega_0 a_0^3. \quad (6.84)$$

En exprimant dans cette dernière équation a_0 en fonction de H_0 et Ω_0 , grâce à (6.83), on est conduit à :

$$a_{\max} = \frac{\Omega_0}{H_0(\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.85)$$

Un tel univers est donc caractérisé par une phase d'expansion jusqu'au facteur d'échelle maximum, suivie d'une phase de contraction. Il est possible d'étudier plus en détails sa dynamique. Dans (6.81), on peut éliminer le terme $8\pi G/3$ à l'aide de (6.82), ce qui donne :

$$\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = a_{\max} \frac{a^2(t)\rho}{a_0^3\rho_0} - 1 = \frac{a_{\max}}{a(t)} - 1. \quad (6.86)$$

Ce qui peut encore s'écrire sous la forme d'une équation à variables séparées :

$$\frac{da}{\sqrt{\frac{a_{\max}}{a} - 1}} = dt. \quad (6.87)$$

Moyennant le changement de variable $a(\chi) = a_{\max} \sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$, on montre très facilement, que l'intégration conduit à $t(\chi) = \frac{a_{\max}}{2}(\chi - \sin \chi)$. Il n'est pas possible d'éliminer χ analytiquement, on dispose donc d'une équation paramétrique de l'évolution cosmologique : $a(\chi)$ et $t(\chi)$, ce qui permet de tracer $a(t)$ comme une courbe en cloche qui culmine en $a_{\max}$.

Il est également intéressant de tenter d'exprimer l'âge d'un tel univers en fonction de paramètres observables. À partir de la valeur de $a_{\max}$ donnée par (6.82), et en utilisant (6.83) conjointement avec $\Omega_0 = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}$, on obtient :

$$\frac{a_0}{a_{\max}} = \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0}. \quad (6.88)$$

En utilisant cette dernière relation dans la définition $a_0 \equiv a(\chi_0) = a_{\max} \sin^2\left(\frac{\chi_0}{2}\right)$, cela conduit à :

$$\chi_0 = 2\arcsin\left[\left(1 - \Omega_0^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (6.89)$$

et donc à

$$\sin \chi_0 = \sin\left[2\arcsin\left(1 - \Omega_0^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (6.90)$$

En utilisant $\sin(2x) = 2 \sin(x) \times \cos(x)$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, on obtient :

$$\sin \chi_0 = \frac{2(\Omega_0 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\Omega_0}. \quad (6.91)$$

En nommant $t_0 \equiv t(\chi_0) = \frac{a_{\max}}{2}(\chi_0 - \sin \chi_0)$ et en utilisant (6.85), cela mène à :

$$t_0 = \frac{\Omega_0}{H_0(\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} \left[\arcsin\left(1 - \Omega_0^{-1}\right) - \frac{(\Omega_0 - 1)^{\frac{1}{2}}}{\Omega_0} \right]. \quad (6.92)$$

Il est remarquable qu'il soit finalement aisé de calculer ces grandeurs fondamentales.

L'étude du cas $p = \Lambda = 0, k = -1$ est formellement semblable. L'équation d'évolution est ici donnée par :

$$\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho a^2(t)}{3} + 1. \quad (6.93)$$

Clairement, dans ce cas, $\frac{da(t)}{dt}$ ne s'annule jamais et l'expansion de l'Univers se poursuit *ad vitam aeternam*.

Pour $t \rightarrow 0$, on peut négliger le terme de courbure (le $+1$ de l'équation précédente) et l'évolution est donc en $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$.

Pour $t \rightarrow \infty$, c'est au contraire le terme constant qui domine et $\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 \approx 1$. Soit $a(t) \propto t$. À la différence du cas $k = 0$, l'expansion, ici, ne ralentit pas avec le temps et se poursuit à un taux constant.

L'intégration exacte se mène suivant la même démarche que précédemment en posant cette fois $a(\chi) = a_{\max} \sinh^2 \frac{\chi}{2}$, ce qui conduit à $t(\chi) = \frac{a_{\max}}{2} (\sinh \chi - \chi)$. Ici $a_{\max} = \frac{\Omega_0}{H_0(1-\Omega_0)^{3/2}}$ ne représente bien évidemment plus le facteur d'échelle maximum, puisqu'un tel maximum n'existe plus. Il s'interpréterait plutôt comme le rayon d'un trou noir de massé $\frac{4}{3}\pi\rho_0 a_0^3$.

Enfin, les cas $\Lambda \neq 0$ sont également riches d'informations. Considérons une fois encore des univers de poussière ($p = 0$). L'équation d'évolution s'écrit :

$$\left(\frac{da(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho a^2(t)}{3} - k + \frac{\Lambda a^2(t)}{3}. \quad (6.94)$$

Le premier terme varie comme $1/a$ (puisque $\rho a^3 = cte$), le deuxième est constant et le troisième varie comme a^2 . Ce qui permet de voir immédiatement que chaque époque cosmologique est dominée par un terme différent. Aux temps très avancés, la constante cosmologique peut jouer un rôle considérable et gouverner l'évolution du facteur d'échelle. Plusieurs sous-cas sont à distinguer.

- Cas $\Lambda < 0$:

- pour $k = 1$, le terme de constante cosmologique a le même signe que le terme de courbure. Ils agissent l'un et l'autre pour stopper l'expansion et donner lieu à une contraction ;
- pour $k = -1$ et $k = 0$, il en ira, *in fine* de même. En effet, le terme de courbure favorise l'expansion (ce qu'on a vu aux paragraphes précédents) et autorise donc à considérer la limite $t \rightarrow \infty$. Mais, lorsque t devient suffisamment grand, c'est le terme de constante cosmologique qui finit nécessairement par dominer. Et celui-ci s'oppose à l'expansion (car il est négatif).

- cas $\Lambda > 0$:

- pour $k = -1$ (et $k = 0$), le terme de constante cosmologique a le même signe que le terme de courbure. Ils agissent l'un et l'autre pour favoriser l'expansion. Celle-ci perdure donc indéfiniment. Dans les deux cas, c'est le terme de constante cosmologique qui finit par dominer. On a donc, pour $t \rightarrow \infty$, $\left(\frac{da}{dt}\right)^2 \approx \frac{\Lambda a^2}{3}$. Ce qui conduit à $a(t) \propto \exp(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t)$ ou $a(t) \propto \exp(Ht)$ avec $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$. La croissance de l'Univers devient donc exponentielle pour des temps très avancés ! Dans ce régime, on parle d'un univers de Sitter ;

- pour $k = +1$, la situation est plus complexe. En effet, si le terme de courbure est suffisamment grand par rapport au terme de constante cosmologique, la recon-traction a lieu avant que ce dernier domine. Au contraire, si le terme de constante cosmologique est assez grand, il peut prendre le dessus rapidement et définitivement dominer. Suivant la valeur relative de ces termes, deux évolutions sont donc possibles

6.4 DES PARADOXES DANS LE PARADIGME ?

Le modèle cosmologique standard, celui d'un univers en expansion depuis un instant originel hors d'atteinte, est remarquablement concluant. Les diverses observations sont cohérentes entre elles et la relativité générale donne un cadre théorique pour soutenir l'ensemble de l'édifice. La cosmologie physique est incontestablement un des grands succès scientifiques du siècle qui vient de s'écouler. Les observations montrant que l'Univers est en expansion sont soutenues par la relativité générale qui conduit naturellement à un espace dynamique. Le cosmos a radicalement changé de visage.

La densité totale de l'Univers est aujourd'hui bien connue, avec une précision voisine du pourcent. Cette grandeur peut être estimée de trois manières différentes au moins. Étudions-la comme un exemple de succès de la cosmologie contemporaine.

Premièrement, elle peut être inférée de manière théorique. Comme cela sera évoqué en exercice, nous avons d'excellentes raisons de penser qu'une phase d'expansion *accélérée* (i.e. $\ddot{a} > 0$) du facteur d'échelle – nommée inflation – a probablement eu lieu dans les premiers instants de l'Univers². L'inflation permet non seulement de résoudre certaines apories mais, surtout, génère naturellement les fluctuations qui vont ensuite donner naissance aux structures cosmologiques. Or, cette gigantesque augmentation du facteur d'échelle (d'un facteur de plus de $\exp(60)$ en moins de 10^{-30} seconde) va génériquement « diluer » la courbure³. Dans l'image bidimensionnelle, si le ballon de baudruche devient gigantesque, sa courbure devient très faible. Il semble plat lors d'une mesure locale. Autrement dit, l'inflation prédit $\Omega_{\text{tot}} \approx 1$. À

2. Une fois cette inflation primordiale terminée (moins de 10^{-30} seconde après le Big Bang), notre Univers entre dans une phase d'expansion *décélérée*. Cette phase s'étend jusqu'à environ 7×10^9 années après le Big Bang, époque à partir de laquelle une nouvelle phase d'expansion accélérée s'amorce (comme mentionnée ultérieurement dans ce chapitre).

3. Il est toutefois essentiel de se convaincre qu'il s'agit bien d'une expansion accélérée que la courbure peut être « diluée ». En définissant $\Omega_k = (-k/a^2 H^2)$ – la « contribution » de la courbure spatiale à la densité d'énergie normalisée à la densité critique –, on obtient $\dot{\Omega}_k = (-k/(\dot{a})^2)$. Pour un univers en expansion décélérée, la quantité $\dot{\Omega}_k$ diminue au cours du temps et, bien que l'Univers « grandisse », la contribution de la courbure augmente. Dans le cas d'un univers *inflationnaire*, c'est-à-dire en expansion accélérée, la quantité $\dot{\Omega}_k$ augmente au cours du temps. Ainsi Ω_k diminue et la courbure est effectivement diluée.

noter que même s'il y avait moins (ou plus) de matière dans l'Univers on observerait, après une phase d'inflation, de toute façon $\Omega_{\text{tot}} \approx 1$. En effet, dans la définition de Ω_{tot} , intervient la densité critique qui est elle-même une fonction de la constante de Hubble. Cette dernière est une sorte de paramètre d'auto-ajustement du modèle : il permet à l'Univers d'être quasi euclidien, quel que soit son contenu, s'il y a effectivement eu une phase inflationnaire.

Deuxièmement, la densité totale peut être évaluée à l'aide du fond diffus cosmologique. Comme nous l'évoquions en introduction de ce chapitre, ce rayonnement fossile, issu du découplage entre lumière et matière quelque 380 000 ans après la Big Bang est extrêmement riche d'informations. Juste avant le découplage, alors que la matière tendait à tomber dans les puits de potentiel gravitationnels, la lumière jouait le rôle d'une force d'antistructuration (la pression radiative empêchant l'effondrement gravitationnel). De ces deux effets antagonistes naquirent des ondes de densité (c'est-à-dire des ondes acoustiques) dans le fluide cosmologique. On peut aujourd'hui observer ces ondes dans le fond diffus de rayonnement. La plupart des paramètres cosmologiques peuvent être déterminés avec précision en étudiant finement la structure des pics acoustiques. En particulier, si l'on connaît le paramètre de Hubble, le premier de ces pics (plus précisément la longueur physique caractéristique associée à ce pic), correspondant aux oscillations à grande échelle, est fortement lié à la densité totale de l'Univers. Le résultat de cette analyse est compatible avec la prédiction de l'inflation et montre que la densité est égale à la densité critique avec une précision de l'ordre du pourcent.

Troisièmement, on peut sommer les contributions individuelles des différentes composantes du fluide cosmique. Et, là encore, la valeur totale est en adéquation avec les deux précédentes estimations.

Un certain nombre de paradoxes vient néanmoins grever cet élégant paradigme.

En premier lieu, il semble que l'essentiel de la masse de l'Univers soit de nature inconnue. La matière visible dans les longueurs d'onde optiques, c'est-à-dire très essentiellement les étoiles, ne représente qu'une très petite fraction, de l'ordre de 0,5%, de la masse totale de l'Univers. Ceci a été établi à différentes échelles par plusieurs méthodes indépendantes. Il existe donc de la matière noire (c'est-à-dire, par définition, invisible en optique). Une partie de celle-ci est baryonique (ce qui signifie essentiellement « constituée » des particules élémentaires qui composent effectivement la matière qui nous est familière : les quarks et les gluons). Vraisemblablement, il s'agit majoritairement de gaz chaud qui émet dans les longueurs d'onde X. Mais, pire encore, on sait qu'il existe de la matière noire non baryonique (autrement dit non constituée des particules élémentaires connues puisque les photons et les neutrinos contribuent peu au bilan global) ! De plus, cette matière noire non baryonique est environ six fois plus abondante que la matière noire baryonique, elle-même, dix fois

plus abondante que la matière visible. C'est dire l'ampleur de l'énigme. Enigme qui relève donc tout autant de la cosmologie à proprement parler que de la physique des hautes énergies. Le microcosme et le macrocosme sont ici intimement liés.

En second lieu, des supernovae particulières ont été utilisées à la fin du XX^e siècle pour estimer la valeur de la décélération de l'Univers. La méthode est simple et se fonde sur le fait que les supernovae de type Ia sont (presque) des chandelles standard : elles ont toutes la même luminosité. On peut donc se servir de leur éclat apparent pour estimer leur distance (ce qui est impossible avec des galaxies par exemple : on ne peut savoir si un objet donné est proche et de luminosité faible ou lointain et de luminosité élevée). Par ailleurs, le décalage spectral de la galaxie hôte permet d'estimer la vitesse de déplacement de la supernova par rapport à nous (bien que ce soit, en toute rigueur, impropre, on peut penser cela en termes d'effet Doppler). Il est ainsi possible de connaître la vitesse en fonction de la distance et donc en fonction du temps. La dérivée de cette fonction permet d'estimer directement la décélération de l'expansion cosmologique. Or, à la surprise générale, il a été mesuré que cette décélération était *négative*, autrement dit qu'il s'agissait d'une accélération ! Manifestement, dans un Univers en expansion où la seule force à l'œuvre est une gravité attractive, l'expansion ne pourrait qu'être de moins en moins rapide...

En troisième lieu, le Big Bang lui même n'est pas sans difficultés si l'on réfère par ce terme au véritable instant primitif, au $t = 0$ où la théorie devient singulière. Les succès heuristiques du modèle ont, ces dernières décennies, eu un peu tendance à en occulter les faiblesses ontologiques. Il n'est pas satisfaisant de bâtir une représentation de l'Univers primordial sur une théorie qui, précisément, cesse d'être valide à l'instant initial. Les divergences ne sont certainement pas des problèmes de l'espace-temps mais plutôt des signes de l'incomplétude du modèle qui tente de le décrire. Que la relativité générale, théorie purement classique, ne soit plus adéquate quand, justement, les effets quantiques sont attendus, n'est pas étonnant. Mais ce n'est pas un détail : toute notre image de ce qu'est l'Univers primordial pourrait s'en trouver radicalement modifiée.

Ce dernier problème est à mettre en regard de l'inflation. Si cette phase d'expansion (exponentielle) accélérée offre une explication naturelle à la courbure de l'Univers et à l'incroyable isotropie du fond diffus cosmologique, tout en fournissant un mécanisme approprié de formation d'inhomogénéités primordiales à l'origine des structures cosmiques, initier « naturellement » un tel phénomène dans les tout premiers instants de l'histoire cosmique reste une tâche ardue. Bien que l'existence de l'inflation semble maintenant admise, un modèle microphysique univoque et satisfaisant tant du point de vue de la théorie que de l'observation, n'a toujours pas émergé (bien que de nombreuses propositions existent). Or l'inflation elle-même s'amorce-rait à des instants si proches de l'instant primitif, $t = 0$, qu'il n'est pas déraisonnable

de considérer que la relativité générale ou la physique (standard) des particules ne s'applique plus nécessairement.

À chacune de ces énigmes, il existe des éléments de réponse. La question qui se pose – qui doit perpétuellement se poser en science – est de savoir si l'on viendra à bout de ces étrangetés par quelques adjonctions et corrections ou s'il faudra renoncer à l'ensemble du paradigme et reconstruire tout l'édifice. Il est évidemment impossible de répondre à cette interrogation. On peut néanmoins mentionner quelques voies étudiées pour sortir des difficultés précédemment mentionnées.

La matière noire pourrait être composée de particules « supersymétriques ». La supersymétrie est une extension du « modèle standard » de la physique des particules. Au niveau technique, elle permet de stabiliser la masse du boson de Higgs⁴, de faire converger les constantes de couplage et de résoudre beaucoup de difficultés diverses. Au niveau conceptuel, elle invente un lien fort et inédit entre le monde des particules (fermions) et celui des forces (bosons). De plus, elle prédit l'existence d'une particule stable, lourde et faiblement interagissante. Celle-ci est un candidat idéal pour la matière noire. En dépit de ses nombreux attraits, la supersymétrie n'a toujours pas été mise en évidence expérimentalement.

En ce qui concerne l'accélération de l'expansion cosmologique, il existe une très grande quantité de modèles étudiés. Les uns sont fondés sur une modification profonde de la relativité générale, les autres sur la présence d'un fluide cosmologique présentant l'équation d'état autorisant une gravité répulsive (ce qui est impossible en mécanique newtonienne mais possible en relativité générale). Pourtant, il faut là encore noter, comme nous l'avons suggéré à la fin du chapitre 5, qu'une simple constante cosmologique – partie intégrante de la relativité générale – permet une telle accélération. Bien que le problème des corrections radiatives⁵ à cette constante demeure entier, c'est sans doute l'explication la plus vraisemblable.

Enfin, pour ce qui est de la singularité originelle elle-même, il est essentiellement impossible de s'en affranchir dans le paradigme actuel. C'est vers une théorie quantique de la gravitation qu'il faut alors se tourner (voir les deux derniers chapitres de cet ouvrage). Qu'il s'agisse de cordes, de boucles ou de tout autre chose, c'est nécessairement d'une révolution qu'il est ici question.

4. La physique des particules est une quête d'unification. Néanmoins, le monde dans lequel nous vivons n'est pas unifié. Le champ de Higgs permet la brisure de symétrie qui rend, comme expliqué dans les premiers chapitres, conciliable l'unification conceptuelle avec la diversité effective.

5. En théorie quantique des champs, les valeurs « nues » reçoivent des corrections. Par exemple, la charge effective de l'électron est sa valeur « nue » plus ce qui provient d'une somme de processus quantiques plus complexes. Si l'on applique ce type de raisonnement à la gravitation, un problème majeur apparaît : dans un noyau d'atome, les corrections à une boucle à l'énergie d'un nucléon se couplent bien à la gravitation mais le même processus dans le vide ne se couple *pas* à la gravitation. C'est une énigme cruciale de physique théorique.

Exercices

6.1 Retour sur la métrique FLRW

On s'intéressera ici à différentes « reformulations » de la métrique FLRW ainsi qu'à l'interprétation des systèmes de coordonnées.

1. Dans le cas $k = 0$, montrez que la métrique FLRW est *conforme* à celle d'un espace-temps de Minkowski. Quel est le facteur conforme ?
2. La métrique FLRW peut se récrire sous une forme dite *isotrope*

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{(1 + k\rho^2/4)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Exprimez ρ en fonction de σ . Quelle est la particularité de la section spatiale de cette métrique ?

3. Soit la coordonnée χ définie par

$$\sigma = \begin{cases} \sinh \chi & \text{pour } k = -1 \\ \chi & \text{pour } k = 0 \\ \sin \chi & \text{pour } k = 1 \end{cases}$$

parfois nommée *distance comobile*.

- (a) Donnez la métrique FLRW en fonction de χ .
- (b) On définit la distance propre D_p , comme la distance entre deux points à temps cosmique fixé. Quelle est la distance propre entre notre galaxie, située en $(\sigma, \theta, \varphi) = (0, \theta, \varphi)$, et une galaxie située en $(\sigma, \theta, \varphi) = (\sigma_0, \theta, \varphi)$? (Donnez les résultats en utilisant σ puis en utilisant la coordonnée comobile χ .)
- (c) Calculez la distance propre d'une source en σ , s'étendant de $\theta_{(-)} = \theta - (\delta/2)$ à $\theta_{(+)} = \theta + (\delta/2)$. Donnez les résultats en utilisant σ puis en utilisant la coordonnée comobile χ .
- (d) À partir de ces deux résultats, proposez une interprétation à σ et χ .
- (e) La distance D_c est définie comme la distance parcourue par un photon émis, à $t < t_0$, par une source *comobile* en $\sigma = 0$ et reçu, à t_0 , par un observateur *comobile* en $\sigma = \sigma_0$. Quelle est l'expression de σ_0 en fonction de t et t_0 ? (On pourra passer par la coordonnée χ pour simplifier les calculs.)

Remarque

On considère que deux métriques $g^{\mu\nu}$ et $\tilde{g}^{\mu\nu}$ sont conformes si $g^{\mu\nu} = f(x^\mu)\tilde{g}^{\mu\nu}$ avec f une fonction positive arbitraire de l'espace-temps. Pour un photon, on rappelle que $ds = 0$.

6.2 Cosmométrie

La reconstruction observationnelle de la dynamique de l'Univers peut s'effectuer de la manière suivante. On reconstruit d'une part les distances observées de sources en fonction de leurs *redshifts* z : $D_{\text{obs}} = f(z)$. D'autre part, pour une dynamique cosmologique donnée (*i.e.* un modèle), on prédit la relation $D_{\text{obs}} = f(z)$, à partir des relations (distance observée/distance théorique) et (distance théorique/*redshift*). On confronte alors théorie et observation. L'exercice ci-dessous propose d'étudier un exemple de distance observée : la distance angulaire.

La distance angulaire d'une source cosmique étendue (par exemple une galaxie) se définit comme $D_A = \frac{L}{\delta\theta}$ avec L la longueur physique de la source (*i.e.* son extension) au moment de l'émission des photons, et $\delta\theta$ l'extension angulaire *observée* de cette source. On considère alors une source circulaire sur le ciel dont le centre est $(\sigma, \theta, \varphi) = (\sigma, 0, 0)$ et le contour est un cercle tel que $\theta = \delta/2$.

Le temps t_0 correspond à « aujourd'hui » (l'instant où les mesures sont effectuées) et nous prendrons les notations $f_0 = f(t_0)$ avec f une quantité cosmologique.

1. Quelle est la distance angulaire d'une telle source ? Exprimez le résultat à l'aide du *redshift*.
2. Puisque les sources observées aujourd'hui sont détectées grâce aux photons qu'elles émettent, montrez, dans le cas $k = 0$ et $\Lambda = 0$, à l'aide des équations de Friedmann que la distance d'une source est

$$\sigma(z) = a_0^{-1} \int_0^z \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho(z')}} dz',$$

avec a_0 le facteur d'échelle aujourd'hui.

3. Considérons maintenant un univers plat $k = 0$, et sans constante cosmologique $\Lambda = 0$, rempli d'un *unique* fluide. On appellera H_0 et $\Omega_0 = (8\pi G \rho_0)/(3H_0^2)$ le paramètre de Hubble et la densité d'énergie normalisée à la densité critique, tous deux évalués à t_0 .
 - (a) Quelle doit nécessairement être la valeur de Ω_0 ?
 - (b) Donnez la distance angulaire en fonction du *redshift* pour un univers rempli i) de poussières, *i.e.* $p = 0$ et ii) d'un fluide tel que $p = -\rho$. (On pourra exprimer ρ en fonction de $a(t)$.)

- (c) Par des mesures astronomiques de la distance angulaire dans l'Univers dit local (*i.e.* $z \ll 1$), vous semble-t-il possible de discriminer entre les deux types de fluides ?

Remarque

Le *redshift*, usuellement noté z , d'un objet cosmologique ou astrophysique est défini par $z+1 = \frac{a(t_0)}{a(t)}$. Les temps plus anciens correspondent à des valeurs de z plus élevées et $z(t_0) = 0$. Les équations de Friedmann à utiliser sont

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3}$$

et

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0.$$

6.3 L'inflation cosmique

La paradigme cosmologique actuel suggère deux phases d'expansion accélérée ($\ddot{a} > 0$) : l'une primordiale, environ 10^{-30} seconde après le Big Bang et communément appelée *inflation cosmique*, et une seconde plus récente, à l'origine du problème de l'énergie noire. La phase d'inflation primordiale résout, entre autres, le problème dit de la courbure (en diluant complètement la courbure spatiale de l'Univers) ainsi que le problème dit de l'horizon car la distance de Hubble comobile *diminue* durant l'inflation.

On cherchera tout d'abord dans cet exercice les conditions génériques de pression d'un fluide pour qu'il y ait expansion accélérée. On montrera ensuite comment un champ scalaire satisfait à ces conditions et peut ainsi conduire à une telle phase. L'exemple présenté ci-dessous peut servir de modèle pour l'inflation cosmique primordiale.

On considère ici un espace plat ($k = 0$) en expansion avec $\Lambda = 0$. On appellera a_0 et H_0 les valeurs du facteur d'échelle et du paramètre de Hubble en fin d'inflation.

1. Quelques propriétés d'un univers en expansion accélérée.

- Montrez que $\dot{H} + H^2 > 0$ est une condition suffisante pour avoir une expansion accélérée.
- Montrez que durant une phase d'expansion décélérée, la distance de Hubble $d_H = 1/H$ croît nécessairement.
- Comment évolue la distance de Hubble comobile, $\tilde{d}_H = d_H/a$ pour un univers en expansion décélérée et pour un univers en expansion accélérée ?

2. Soit un fluide tel que $p = w\rho$ avec $-1 < w < 1$ ($w = cte$). La densité d'énergie du fluide en fin d'inflation est ρ_0 .

- (a) Montrez à l'aide des équations de Friedmann que $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$.
- (b) Déterminez si l'expansion est accélérée ou décélérée selon la valeur de w .
- (c) Déterminez l'évolution de ρ et de a . (On pourra déterminer $\rho = f(a)$ en premier lieu.)
3. Dans l'Univers primordial, on considère que le fluide dominant est un champ scalaire Φ évoluant dans un potentiel d'auto-interaction $V(\Phi)$.
- (a) Donnez la densité d'énergie et la pression de ce champ scalaire dans un univers homogène. (Le champ scalaire sera vu comme un fluide parfait.)
- (b) Donnez les conditions énergétiques que doit satisfaire le champ scalaire pour que l'Univers soit dans une phase d'expansion accélérée.
- (c) Montrez que la dynamique du champ scalaire est donnée par $\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0$. (Cela correspond à l'équation de Klein-Gordon dans un espace-temps FLRW.)
4. Dans la suite, nous considérerons un champ massif $V = \frac{1}{2}m^2\Phi^2$. On suppose que $\frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2 + 2V(\Phi)} \ll 1$ et que $|\ddot{\Phi}| \ll |3H\dot{\Phi}|$.
- (a) Avec de telles approximations, donnez l'équation de Friedmann approchée puis l'équation d'évolution de Φ .
- (b) En utilisant ces équations approchées, déterminez une contrainte sur Φ_i , la valeur initiale du champ à $t = t_i$, pour que l'Univers rentre en phase de croissance accélérée. (On pourra mettre $\frac{\partial V}{\partial \Phi}$ en regard de $V(\Phi)$.)
- (c) Résolvez les équations de Friedmann et de Klein-Gordon simplifiées pour obtenir l'évolution du champ scalaire et du facteur d'échelle entre $t_i = 0$ et t_0 .
- (d) Comment Φ évolue-t-il avec le temps ? Montrez que $a(t)$ croît exponentiellement. (On pourra exprimer $a = f(\Phi)$.)
- (e) En supposant $\Phi(t_0) \sim 0$, calculez Φ_i pour que la taille de l'Univers soit multipliée par un facteur e^{60} .
- (f) Quelle est l'échelle d'énergie impliquée dans cette phase d'expansion accélérée ? Ce modèle est-il préférentiellement utilisé pour une phase d'expansion accélérée récente ou primordiale (justifiez) ?
- (g) Pour une masse de $m = 10^{-6} E_{\text{Planck}}$, calculez la durée de l'inflation pour que la taille de l'Univers soit multipliée par un facteur e^{60} .

Remarque

Les équations de Friedmann sont

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3}$$

et

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0.$$

Le tenseur énergie-impulsion d'un champ scalaire est

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\lambda \Phi \partial^\lambda \Phi - V(\Phi) \right].$$

En unité naturelle, $\hbar = c = 1$, la constante de Newton se relie à l'énergie de Planck par $E_{\text{Planck}} = \sqrt{1/G} = 1,22 \times 10^{28}$ eV. Toujours dans ce système d'unité, une masse est homogène à une énergie tandis qu'un temps est homogène à l'inverse d'une énergie. Les correspondances (temps/inverse d'une énergie) sont : $1 \text{ eV}^{-1} = 6,65 \times 10^{-16} \text{ s}$ ou encore $E_{\text{Planck}}^{-1} = 5,3 \times 10^{-44} \text{ s}$.

Corrigés

6.1

1. Pour $k = 0$, la section spatiale de la métrique FLRW est plate, on peut donc récrire : $ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ avec x, y, z un système de coordonnées cartésiennes. En définissant une nouvelle coordonnée de temps, appelée *temps conforme*, par $\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$, on trouve $ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)$. Cette métrique est conforme à la métrique de Minkowski avec comme facteur conforme $a(\eta)$.

2. En identifiant $\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}}$ avec $\frac{d\rho}{1+k\rho^2/4}$, on trouve

$$\rho = \begin{cases} 2 \tanh(\text{arcsinh}(\sigma)/2) & \text{pour } k = -1 \\ \sigma & \text{pour } k = 0 \\ 2 \tan(\text{arcsin}(\sigma)/2) & \text{pour } k = 1 \end{cases}$$

La section spatiale de cette forme de la métrique FLRW est conforme à la métrique en coordonnées sphériques de l'espace euclidien tri-dimensionnel. Le facteur conforme est ici $f(t, \rho) = a^2(t)/(1 + k\rho^2/4)^2$.

3. (a) On trouve $ds^2 = dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \Sigma_k^2(\chi)d\theta^2 + \Sigma_k^2(\chi)\sin^2\theta d\varphi^2)$, avec

$$\Sigma_k(\chi) = \begin{cases} \sinh \chi & \text{pour } k = -1 \\ \chi & \text{pour } k = 0 \\ \sin \chi & \text{pour } k = 1 \end{cases}$$

(b) À un temps fixé, la distance propre est :

$$D_p(t) = a(t) \int_{\sigma(t)=0}^{\sigma_0(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} a(t) \operatorname{arcsinh}(\sigma_0) & \text{pour } k = -1 \\ a(t) \sigma_0 & \text{pour } k = 0 \\ a(t) \operatorname{arcsin}(\sigma_0) & \text{pour } k = 1 \end{cases}.$$

Avec $\chi_0 = \sinh \sigma_0$, σ_0 , $\sin \sigma_0$ pour $k = -1, 0, 1$, cela donne

$$D_p(t) = a(t) \chi_0.$$

(c) Pour la source étendue, on trouve

$$D_p(t) = a(t) \sigma \delta = a(t) \Sigma_k(\chi) \delta.$$

(d) À temps cosmique fixé, χ donne une mesure directe de la distance « radiale » entre deux points : elle donne la distance comobile. De même, l'extension « comobile » d'une source étant donnée par $\sigma \times \delta$, r est donc une mesure directe du rayon des cercles et sphères immergés dans l'espace FLRW.

(e) Puisque $ds = 0$ pour un photon, on en déduit que $\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = \frac{dt}{a(t)}$. En posant $\chi = \sigma$ pour $k = 0$, $\chi = \operatorname{arcsin}(\sigma)$ pour $k = 1$ et $\chi = \operatorname{arcsinh}(\sigma)$ pour $k = -1$, on obtient

$$\chi_0 = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}.$$

6.2

1. La longueur physique de la source à l'émission des photons est son extension propre : $L = a(t) \sigma \delta$. La taille angulaire de la source est alors $\delta\theta = \delta$. On trouve donc $D_A = a(t) \sigma$. Puisque $1 + z = \frac{a_0}{a(t)}$, on obtient $D_A = \frac{a_0 \sigma(z)}{1+z}$.

2. Pour un photon en espace plat : $d\sigma = \frac{dt}{a(t)}$. En utilisant l'équation de Friedmann, on trouve

$$\sigma = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_{a(t)}^{a_0} \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho}} da.$$

En utilisant ensuite $a = \frac{a_0}{1+z}$ et $da = -\frac{a_0}{(1+z)^2}$, on obtient

$$\sigma(z) = a_0^{-1} \int_0^z \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho(z')}} dz'.$$

3. (a) Puisque cet univers est rempli d'un unique fluide, Ω_0 donne la densité d'énergie totale de l'univers, Ω_{tot} . Or, pour un univers avec $k = 0$, on a nécessairement $\Omega_{\text{tot}} = 1$. On trouve donc $\Omega_0 = 1$.

- (b) i) Pour un univers rempli de poussières, il faut résoudre $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}$ dont la solution est $\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3} = \rho_0 (1+z)^3$. On trouve alors

$$\sigma(z) = 2a_0^{-1} \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_0}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right].$$

En utilisant H_0 et $\Omega_0 = 1$, la distance angulaire est

$$D_A(z) = \frac{2}{H_0} \left[\frac{\sqrt{1+z} - 1}{(1+z)^{3/2}} \right].$$

- ii) Pour un univers rempli d'un fluide tel que $p = -\rho$, la deuxième équation de Friedmann donne $\rho = cte = \rho_0$. On trouve alors pour la distance angulaire en fonction du *redshift*

$$D_A(z) = \frac{1}{H_0} \left[\frac{z}{1+z} \right].$$

- (c) En effectuant un développement limité au premier ordre en z , on trouve $D_A \simeq \frac{z}{H_0}$ pour les deux types d'univers. Il faut des mesures à suffisamment grand *redshift* pour distinguer entre les deux fluides.

6.3

1. (a) En dérivant H par rapport à t on trouve $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$. Puisque $a > 0$, on a accélération si $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$, c'est-à-dire si $\dot{H} + H^2 > 0$.
- (b) On calcule la dérivée temporelle de la distance de Hubble $\dot{d}_H = 1 - H^{-2} \times \frac{\ddot{a}}{a}$. Pour un univers en décélération, $\ddot{a} < 0$ et $\dot{d}_H > 0$: la distance de Hubble croît nécessairement.
- (c) La distance comobile de Hubble vaut $\tilde{d}_H = \dot{a}^{-1}$. Pour $\ddot{a} < 0$ (i.e. expansion décélérée), $\dot{a}$ diminue et la distance de Hubble comobile augmente. Pour $\ddot{a} > 0$ (i.e. expansion accélérée), $\dot{a}$ augmente et la distance de Hubble comobile diminue.
2. (a) En dérivant l'équation de Friedmann, on montre que $2H \times \dot{H} = \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho}$. Cette équation est ensuite combinée avec $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$ et $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$ ainsi que l'équation de Friedmann pour montrer que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p).$$

- (b) À partir de $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p)$, on montre que si $-1/3 < w < 1$ alors $\ddot{a} < 0$: l'expansion est décélérée ; tandis que si $-1 < w < -1/3$ alors $\ddot{a} > 0$: l'expansion est accélérée.

- (c) À partir de la conservation d'énergie du fluide, i.e. $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$, on trouve

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{da}{a}.$$

Avec les conditions initiales (ici « finales ») ρ_0 et a_0 , on obtient

$$\rho(a) = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}.$$

Injecté dans l'équation de Friedmann, cela aboutit à

$$a^{(1+3w)/2} da = a_0^{(1+3w)/2} H_0 dt,$$

qui s'intègre en

$$a(t) = a_0 \left[1 - \frac{H_0}{a_0} (t_0 - t) \right]^{\frac{2}{3(1+w)}},$$

avec $H_0/a_0 = \sqrt{8\pi G\rho_0/3}$.

3. (a) Pour que l'Univers soit homogène, le champ scalaire doit lui aussi l'être. Puisque Φ ne dépend pas de la position spatiale : $\partial_i \Phi = 0$. Par ailleurs, la métrique $g_{\mu\nu}$ est diagonale avec $g_{00} = 1$, $g_{11} = -a^2$, $g_{22} = -a^2 \sigma^2$, $g_{33} = -a^2 \sigma^2 \sin^2 \theta$. On trouve alors (cf. équations (33) et (34))

$$\rho = T_{00} = \frac{1}{2} (\dot{\Phi})^2 + V(\Phi)$$

et

$$p = \frac{T_{11}}{a^2(t)} = \frac{1}{2} (\dot{\Phi})^2 - V(\Phi).$$

- (b) Pour qu'une expansion soit accélérée, il faut $p/\rho < -1/3$. Cela donne $(\dot{\Phi})^2 < V(\Phi)$: l'énergie potentiel du champ doit dominer son énergie cinétique.
- (c) En incorporant les expressions de ρ et p dans l'équation $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$, on obtient

$$\dot{\Phi}\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Phi})^2 + \frac{dV}{dt} = 0.$$

En notant que $\frac{dV}{dt} = \dot{\Phi} \frac{\partial V}{\partial \Phi}$, on est donc conduit à

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0.$$

4. (a) La première condition implique $V \gg \dot{\Phi}^2/2$, on peut alors négliger $\dot{\Phi}^2/2$ dans l'équation de Friedmann. La deuxième approximation permet de négliger $\ddot{\Phi}$ dans l'équation du champ scalaire. On obtient :

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\Phi),$$

$$\dot{\Phi} \simeq -\frac{1}{3H} \left(\frac{\partial V}{\partial \Phi} \right).$$

- (b) On veut qu'à $t = t_i$: $(\dot{\Phi}_i)^2 < V(\Phi_i)$. En utilisant les approximations ci-dessus, cela se traduit par

$$\frac{1}{24\pi G} \left(\frac{\partial V(\Phi_i)}{\partial \Phi_i} \right)^2 < V^2(\Phi_i).$$

On obtient donc pour un champ massif : $|\Phi_i| > 1/\sqrt{6\pi G}$.

- (c) On appelle (H_i, a_i) les valeurs de (H, a) à $t = 0$. On doit résoudre les équations simplifiées suivantes

$$\begin{aligned} H^2 &\simeq \frac{4\pi G}{3} m^2 \Phi^2, \\ \dot{\Phi} &= -\frac{m^2 \Phi}{3H}. \end{aligned}$$

On résout tout d'abord l'équation en Φ puis celle en a . La solution est

$$\begin{aligned} \Phi(t_0) &= \Phi_i - \frac{m}{\sqrt{12\pi G}} t_0, \\ a(t_0) &= a_i \exp \left[\sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m \left(\Phi_i t_0 - \frac{m}{\sqrt{48\pi G}} t_0^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

- (d) Le champ scalaire décroît avec le temps. En injectant Φ dans a , on trouve

$$a(\Phi) = a_i \exp \left[2\pi G (\Phi_i^2 - \Phi^2) \right].$$

Puisque $\Phi_i > \Phi$ et $(\Phi_i^2 - \Phi^2)$ augmente au cours de l'évolution, le facteur d'échelle croît bien exponentiellement au cours de l'évolution.

- (e) On cherche Φ_i pour que $\ln(a_0/a_i) = 60$. En supposant $\Phi_0 \ll \Phi_i$, cela donne $\ln(a(t)/a_i) = 2\pi G \Phi_i^2$. On trouve donc $\Phi_i \sim 3,1 \sqrt{1/G}$.
- (f) En unité naturelle, la valeur initiale du champ est de l'ordre de $3,1 E_{\text{Planck}}$, ce qui vaut $3,8 \times 10^{28}$ eV. Ce sont donc des énergies colossales qui sont *a priori* impliquées. Une telle énergie ne peut avoir lieu que dans l'Univers primordial et le modèle ici étudié concerne donc l'inflation cosmique primordiale. (On notera toutefois que la densité d'énergie est quant à elle donnée par la valeur du potentiel, $\rho_i \simeq m^2 \Phi_i^2/2 \sim 4.5 \times m^2 \times E_{\text{Planck}}^2$. À moins d'avoir une masse m extrêmement faible, la densité d'énergie reste elle aussi très élevée.)
- (g) Pour $\Phi \sim 3,1 \sqrt{1/G}$, on trouve alors $t_0 \sim 3,1 \sqrt{12\pi}/m$. Cela donne : $t_0 = 9,8 \times 10^{-37}$ s.

Ce chapitre entend présenter une seconde application de la relativité générale. Il s'agit de découvrir quelques propriétés fondamentales de ces astres étranges et pourtant bien connus que sont les trous noirs. Nous montrerons qu'ils poussent la relativité générale à l'extrême et constituent donc des sondes privilégiées pour en comprendre les subtilités.

Les trous noirs fascinent. Ils fascinent et étonnent même les professionnels y consacrant leur vie entière. Bien qu'extraordinairement surprenante, la physique des trous noirs n'est pas à proprement parler « exotique ». Ils sont non seulement bien compris du point de vue théorique mais font également l'objet d'observations et sont devenus des membres presque banals du bestiaire de l'astrophysicien. Ils occupent néanmoins une place privilégiée en tant qu'astres « paroxystiques » qui poussent la relativité générale dans ses retranchements.

7.1 MÉTRIQUE DE SCHWARZSCHILD

7.1.1 Construction de la métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild ne concerne pas exclusivement les trous noirs. Elle est la solution des équations d'Einstein pour une source statique et à symétrie sphérique. Elle est donc tout aussi valable pour une étoile, une planète ou une naine blanche. Nous en donnons dans ce chapitre une dérivation simple et approximative pour « fixer les idées ».

Si l'on visait à l'exhaustivité, il faudrait définir de manière rigoureuse les termes « statique » et « symétrie sphérique ». L'invariance de la relativité générale par changement de coordonnées peut en effet engendrer quelques effets subtils. Restons-en ici à une acception relativement intuitive de ces termes. Nous considérerons que « statique » signifie deux choses. D'abord que toutes les composantes de la métrique sont indépendantes du temps (de la coordonnée x^0) et, ensuite, qu'il n'y a pas de termes croisés du type $dt dx^i$. L'origine de cette dernière condition peut être simplement comprise : si l'on procède à un renversement du temps $t \rightarrow -t$, le terme dt^2 ne change pas

tandis qu'un terme $dt dx$ serait changé en son opposé. La solution cherchée étant indépendante du temps, elle doit être invariante par renversement du temps, et les termes croisés doivent être nuls. Pour imposer la symétrie sphérique, on peut commencer par écrire la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (7.1)$$

avec $d\Omega^2$ l'élément infinitésimal d'angle solide. Pour préserver cette symétrie, il faut évidemment conserver la forme de $d\Omega^2$. Mais nous sommes libres de multiplier les termes par des coefficients arbitraires indépendants du temps :

$$ds^2 = \alpha(r)dt^2 - \beta(r)dr^2 - \gamma(r)r^2 d\Omega^2. \quad (7.2)$$

En l'état, on ne sait pas exactement quelle est la signification de la coordonnée r . On peut introduire une coordonnée $r' = \sqrt{\gamma(r)}r$. On a alors

$$dr' = \sqrt{\gamma}dr + \frac{r}{2\sqrt{\gamma}}d\gamma = \left(\sqrt{\gamma} + \frac{r}{2\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{dr} \right) dr. \quad (7.3)$$

La métrique s'écrit donc :

$$ds^2 = \alpha(r)dt^2 - \beta(r) \frac{dr'^2}{\left(\sqrt{\gamma} + \frac{r}{2\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{dr} \right)^2} - r'^2 d\Omega^2. \quad (7.4)$$

Chaque fonction de r est tout aussi bien une fonction de r' . Renommons donc les choses ainsi :

$$r' \rightarrow r, \quad (7.5)$$

$$\frac{\beta}{\left(\sqrt{\gamma} + \frac{r}{2\sqrt{\gamma}} \frac{d\gamma}{dr} \right)^2} \rightarrow \beta. \quad (7.6)$$

La métrique s'écrit alors plus simplement :

$$ds^2 = \alpha(r)dt^2 - \beta(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (7.7)$$

On a simplement absorbé le facteur γ par une redéfinition de r . Reste à trouver les fonctions α et β . Posons $\alpha = \exp(2\Phi)$ et $\beta = \exp(2\Lambda)$ où les fonctions Φ et Λ n'ont rien à voir avec celles introduites dans les chapitres précédents. La métrique s'écrit :

$$ds^2 = e^{2\Phi} dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (7.8)$$

Par cette dernière réécriture nous avons légèrement restreint la généralité puisque les exponentielles ne peuvent prendre que des valeurs positives. C'est en fait une manière de s'assurer que la signature reste correcte.

Nous suivons donc ici une démarche tout à fait analogue à celle entreprise en cosmologie. Dans un premier temps, les symétries sont utilisées pour simplifier la forme de la métrique. Ce qui conduit, dans ce cas, à (7.8). Reste maintenant à écrire les équations d'Einstein pour trouver les fonctions qui demeurent indéterminées dans la métrique. Bien que conceptuellement simple, cette démarche est longue et calculatoire. Nous admettons ici que la composante (00) du tenseur d'Einstein s'écrit pour (7.8) :

$$G_{00} = r^{-2} - r^{-2}e^{-2\Lambda} - r^{-1} \frac{d}{dr} e^{-2\Lambda}. \quad (7.9)$$

Bien que nous ne menions pas explicitement le calcul, nous insistons sur le fait qu'il ne convoque aucune nouvelle subtilité. Il suffit d'évaluer les coefficients de connexion pour la métrique (7.8), d'en déduire le tenseur de Riemann puis le tenseur et le scalaire de Ricci, et enfin le tenseur d'Einstein. La forme (7.9) peut se réécrire comme :

$$G_{00} = r^{-2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-2\Lambda} \right) \right]. \quad (7.10)$$

Il suffit de développer cette dernière expression pour s'en convaincre. Avec $T_{00} = \rho$, la composante (00) des équations d'Einstein ($G_{00} = 8\pi G T_{00}$) s'écrit donc :

$$r^{-2} \frac{d}{dr} \left(r \left(1 - e^{-2\Lambda} \right) \right) = 8\pi G \rho. \quad (7.11)$$

Notons, comme une définition de $M(r)$, $GM(r) \equiv \frac{1}{2} r \left(1 - e^{-2\Lambda} \right)$, soit encore $e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1}$. En reportant cette définition dans la composante (00) des équations d'Einstein (7.11), on obtient :

$$r^{-2} \frac{d}{dr} \left(2GM \right) = 4\pi G \rho. \quad (7.12)$$

Soit :

$$M = \int 4\pi \rho r^2 dr. \quad (7.13)$$

Cette dernière relation (7.13) montre que la fonction $M(r)$ juste introduite a en fait un sens physique clair : c'est la masse ! En nommant donc M la masse de l'astre, nous avons :

$$e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1}. \quad (7.14)$$

La première fonction métrique est déterminée en fonction des caractéristiques physiques de l'objet. Reste à déterminer la seconde : $e^{2\Lambda}$. On peut montrer que la composante (11) du tenseur d'Einstein s'exprime comme :

$$G_{11} = -r^{-2} + r^{-2}e^{-2\Lambda} + 2r^{-1}e^{-2\Lambda} \frac{d\Phi}{dr}. \quad (7.15)$$

La composante correspondante des équations d'Einstein s'écrit $G_{11} = 8\pi Gp$. Ce qui conduit donc à :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{8\pi p + r^{-2} - r^{-2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}{2r^{-1} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}. \quad (7.16)$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par r^3 , en développant et réduisant, cela s'écrit :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{4\pi Gpr^3 + M}{r(r - 2GM)}. \quad (7.17)$$

En se plaçant à l'extérieur du corps massif, *i.e.* $p = 0$, on obtient :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{M}{r(r - 2GM)}. \quad (7.18)$$

Ce qui s'intègre en :

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2GM}{r}\right). \quad (7.19)$$

Il suffit de dériver (7.19) pour s'en convaincre si nécessaire. La deuxième fonction métrique est maintenant déterminée. En remplaçant (7.14) et (7.19) dans la métrique (7.8) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (7.20)$$

Cette dernière équation constitue la métrique de Schwarzschild. Nous soulignons à nouveau que la dérivation ici proposée est essentiellement « heuristique » et entachée de beaucoup d'approximations. Elle permet de « sentir » la démarche et de comprendre qu'elle se mène de façon tout à fait analogue à l'étude du modèle cosmologique. Dans ce dernier, les équations d'Einstein ont permis de trouver le facteur d'échelle $a(t)$ qui était la fonction inconnue de la métrique après simplification par les symétries. Ici, elles permettent de déterminer les fonctions $\Lambda(r)$ et $\Phi(r)$.

7.1.2 Remarque sur $r = 2GM$

Manifestement, quelque chose de particulier se passe en $r = 2GM$ dans la métrique (7.20). Nous y reviendrons en détail. On peut d'ores et déjà énoncer que cette valeur particulière du rayon marque l'horizon d'un trou noir. La frontière au-delà de laquelle plus aucun retour vers l'extérieur n'est possible, la limite qui, une fois franchie, échange les signes des termes spatiaux et temporels dans la métrique (en ce sens, il n'est pas inepte de dire que l'espace et le temps s'échangent l'un en l'autre dans un trou noir). Pour qu'un corps soit un trou noir, il faut que $r = 2GM$ soit accessible à l'extérieur de la distribution de masse en question. Pour le Soleil, par exemple,

$2GM \approx 1,5 \text{ km}$. Ce qui n'est manifestement pas à l'extérieur du Soleil ! Il n'est bien évidemment pas un trou noir. Si l'on voulait utiliser la métrique de Schwarzschild à l'intérieur du Soleil, à supposer que ce soit légitime, le terme source M à considérer ne serait plus la masse totale mais la masse contenue dans une sphère centrée en 0 et de rayon égal au rayon r considéré¹. La valeur de $2GM$ est donc beaucoup plus petite et n'est jamais « atteinte » avec le Soleil : au fur et à mesure que l'on s'approche du centre $2GM$ diminue et se dérobe sans cesse. Le Soleil n'a pas d'horizon. En revanche, pour un corps extrêmement dense, on peut supposer que cette zone d'espace-temps devienne accessible. Nous verrons dans les paragraphes suivants ce que cela signifie. À ce stade, il est amusant de noter que cette valeur, $r_s = 2GM$, nommée rayon de Schwarzschild, est également celle à laquelle conduit la physique classique si l'on définit un trou noir comme un objet tel que la vitesse de libération à sa surface devienne plus grande que la vitesse de la lumière (et donc tel que rien ne puisse s'échapper). En effet, la vitesse de libération V_l est celle pour laquelle l'énergie potentielle de gravitation (qui tend à faire retomber le corps de masse m jeté verticalement) est exactement égale à l'énergie cinétique (qui tend à permettre au corps de s'extraire du potentiel gravitationnel) :

$$\frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mV^2. \quad (7.21)$$

Si l'on veut que la vitesse de libération soit celle de la lumière (soit $V = 1$ dans notre système d'unités), on voit qu'il faut :

$$r = 2GM. \quad (7.22)$$

Il est assez amusant que l'on obtienne ainsi un résultat juste. Évidemment il a fallu jouer d'une grande chance car le raisonnement classique est incorrect. Il est préférable de garder en tête cette dérivation comme un simple moyen mnémotechnique. Il est également intéressant d'évaluer, même classiquement, l'énergie d'un corps en chute libre quand il arrive à l'horizon du trou noir, *i.e.* en $r = r_s$:

$$E = \frac{GmM}{2GM} = \frac{1}{2}m. \quad (7.23)$$

En unités complètes, cela signifie $E = \frac{1}{2}mc^2$. Autrement dit, l'énergie à l'horizon est gigantesque ! Qu'on se souvienne que dans une réaction de fusion nucléaire on ne récupère qu'une petite proportion de l'énergie de masse. Ici, l'ordre de grandeur est la moitié de l'énergie de masse ! Ce qui permet déjà de comprendre intuitivement pourquoi, en dépit de sa faiblesse au quotidien, la gravitation devient, au voisinage

¹ C'est ce que nous dit le théorème de Gauss en physique classique. Les choses sont en fait un peu plus compliquées si on veut les traiter rigoureusement.

des trous noirs, l'interaction la plus « énergétique » de l'Univers. C'est la raison pour laquelle les quasars sont des phares si puissants, luisant à travers le cosmos : le trou noir supermassif qui siège en leur centre confère une énergie considérable aux particules présentes dans le disque d'accrétion qui l'entoure. Bien évidemment l'énergie rayonnée ne provient pas de l'intérieur du trou noir mais de son environnement extérieur.

7.1.3 Quelques propriétés élémentaires

La forme (7.20) montre clairement la signification de la coordonnée r . Supposons un trou noir (ou un astre quelconque) autour duquel on bâtirait (en pensée) une sphère maillée de même centre que le trou noir. Posons sur ce maillage des horloges. Nous disposons alors d'un système de coordonnées locales pour décrire les événements qui s'y produisent. Comment définir la taille de cette sphère ? On ne peut manifestement pas mesurer la distance qui nous sépare du centre... le voyage serait à sens unique ! Une méthode adaptée consisterait à mesurer la circonférence et à la diviser par 2π . C'est le sens de la coordonnée r : c'est une circonférence réduite. Cela se voit immédiatement en écrivant explicitement la partie angulaire de la métrique,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (7.24)$$

où, assurément, la distance parcourue est bien $2\pi r$ quand θ a été augmenté de 2π à r, t et ϕ constant. On peut aussi dire que r est *défini* de façon que $r d\theta$ soit la distance directement mesurée sur une coquille sphérique de centre $r = 0$ quand θ est augmenté de $d\theta$ à ϕ constant. La coordonnée t représente, quant à elle, le temps à l'infini (là où la gravitation devient « nulle »). Elle est bien « construite » à partir d'un temps qui a cette signification en l'absence de gravitation.

La plupart des processus importants pouvant être décrits par la partie purement radiale de la métrique, nous nous intéressons dans ce qui suit à des phénomènes pour lesquels les angles sont constants. On peut donc simplifier (7.20) en :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (7.25)$$

Quelques propriétés essentielles de cette métrique peuvent être immédiatement mentionnées :

- La métrique de Schwarzschild est complète. Toute description non quantique de l'espace-temps à symétrie sphérique est contenue dans cette écriture.
- En $r = 2GM$, le terme temporel tend vers 0, le terme spatial tend vers l'infini. Cette valeur, nommée rayon de Schwarzschild, définit l'horizon du trou noir.

- Le terme de courbure $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$ ne dépend pas des angles, en accord avec l'hypothèse de symétrie sphérique.
- Le terme de courbure tend vers 1 pour $r \rightarrow \infty$: la métrique de Schwarzschild redevient asymptotiquement minkowskienne loin des sources de champ.
- Le terme de courbure tend vers 1 pour $M \rightarrow 0$: la métrique de Schwarzschild redevient asymptotiquement minkowskienne lorsque le terme source devient négligeable.
- Le facteur $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$ apparaissant devant dr^2 est plus grand que 1. Le ds mesuré localement est donc plus grand que dr . Supposons que l'on construise une coquille sphérique proche de la surface du Soleil (*i.e.* à environ 700 000 km du centre) puis que l'on en construise une autre à une valeur de r plus grande de 1 km. Cela signifie que la seconde coquille a une circonférence réduite (*i.e.* divisé par 2π) supérieure à celle de la première de 1 km. Quelle est la distance que l'on mesurerait directement entre les 2 coquilles ? En espace euclidien, ce serait évidemment 1 km. Ici à cause du terme $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$, c'est un peu plus. Dans cet exemple, ce serait environ 1 km + 2 mm. La différence est faible mais elle met en évidence le caractère non euclidien de l'espace. Au voisinage d'un trou noir la différence entre ces deux manières d'estimer la distance (mesure directe ou différence des circonférences réduites) peut devenir gigantesque (et même infinie). Il est, une fois encore, important de souligner que cette distorsion de l'espace (nous vivons dans un monde où la circonférence d'un cercle n'est *pas* égale à 2π fois son rayon, où la somme des angles d'un triangle n'est *pas* égale à π , etc.) n'est pas due à des forces qui tirent ou poussent les instruments de mesure mais à une déformation de la trame géométrique elle-même.
- Le facteur de courbure $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$ apparaissant devant dt^2 est plus petit que 1. On peut le comprendre comme l'origine du rougissement (*redshift*) gravitationnel. Considérons une horloge immobile sur la coquille spécifique précédemment évoquée. Entre deux « tics » de cette horloge (pour laquelle $dr = 0$), on a $ds = dt_{\text{coq}}$ le temps « coquille » mesuré localement. Soit $ds = dt_{\text{coq}} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2} dt$ où dt représente le temps mesuré par l'observateur « à l'infini ». On voit donc que $dt > dt_{\text{coq}}$. La période temporelle d'un photon émis au voisinage de l'astre sera plus grande à l'infini : sa fréquence sera décalée vers le rouge. La variation relative de fréquence est d'autant plus grande, par rapport à la valeur à l'infini, que l'on s'approche de $r = r_s$. C'est une (parmi d'autres) façon de comprendre pourquoi un trou noir est noir. Si une ampoule tombait sur un trou noir, la fréquence de la lumière serait, quand elle approche de l'horizon, infiniment rougie (décalée vers les basses fréquences) et n'emporterait donc plus aucune énergie. Cet effet fonctionne,

naturellement, aussi dans l'autre sens : un photon émis dans l'espace interstellaire sera légèrement bleui en arrivant sur Terre.

- La métrique de Schwarzschild permet de décrire le mouvement d'une particule test libre à l'extérieur (elle ne serait de toute façon plus libre à l'intérieur) de tout corps massif statique à symétrie sphérique. En ce sens, un trou noir, pour lequel – comme nous le verrons ultérieurement – toute la masse est effondrée au centre est un cas idéal : tout l'espace est correctement décrit par cette métrique à l'exception d'un point.

7.1.4 Sur les coordonnées

Dans notre investigation de la métrique de Schwarzschild, suivant Taylor et Wheeler, nous serons amenés à utiliser trois systèmes de coordonnées :

- Le référentiel en chute libre. C'est le référentiel de la relativité restreinte où tout se passe localement comme s'il n'y avait pas de gravitation. Dans ce référentiel, les variables seront affublées de l'indice *chute*.
- Le référentiel de la coquille sphérique de même centre que l'astre ou le trou noir considéré. Sur Terre, nous vivons dans un tel référentiel ! Au quotidien, la gravitation est simplement pensée comme une force à ajouter aux autres (électriques, magnétiques, etc.) et cette approximation fonctionne remarquablement bien pour des zones spatialement et temporellement limitées. Nous avons écrit au paragraphe précédent l'intervalle à r fixe

$$ds(r = cte) = dt_{\text{coq}} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2} dt, \quad (7.26)$$

comme expression du temps mesuré par une horloge fixe sur une coquille entre deux événements qui seraient deux « tics » successifs. De la même manière, on peut considérer des réveils placés verticalement l'un sous l'autre à une distance infinitésimale. Supposons qu'ils sonnent en même temps ($dt = 0$). La distance propre entre les deux sonneries est l'intervalle à t fixe

$$ds(t = cte) = dr_{\text{coq}} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2} dr. \quad (7.27)$$

Comme on le fait en relativité restreinte avec la métrique de Minkowski, on a pris l'autre signe dans la métrique (7.25) pour évaluer la distance propre. En substituant (7.26) et (7.27) dans la métrique de Schwarzschild, on peut écrire :

$$ds^2 = dt_{\text{coq}}^2 - dr_{\text{coq}}^2. \quad (7.28)$$

Cette métrique ressemble à celle d'un espace euclidien. Mais l'espace n'est évidemment *pas* euclidien et (7.28) est limité aux mesures locales au sens spatial et temporel : dt_{coq} et dr_{coq} sont des fonctions de r . Le référentiel en chute libre est plus « général » que le référentiel coquille en au moins deux sens : la physique lorentzienne peut y être rendue valable « plus longtemps » (en réduisant l'extension spatiale, alors que l'effet gravitationnel ne peut pas être réduit sur la coquille) et il demeure valable à l'intérieur d'un trou noir (pour $r < r_s$) alors même que le concept de coquille stationnaire n'y a plus cours.

- Le référentiel de Schwarzschild. À la différence des coordonnées liées à des référentiels locaux comme ceux précédemment mentionnés, les coordonnées r, t, θ, ϕ de (7.20) permettent une description globale. En un certain sens, l'observateur de Schwarzschild est une sorte d'archiviste. On ne mesure pas directement ces coordonnées (la circonférence réduite et le temps à l'infini) mais elles permettent d'établir une cartographie exhaustive de l'espace-temps dans un système simple et unique.

7.2 PHYSIQUE AU VOISINAGE D'UN TROU NOIR

7.2.1 Énergie en géométrie de Schwarzschild

Intéressons-nous à l'énergie d'une particule-test tombant radialement sur un trou noir depuis l'infini. Son temps propre s'écrit :

$$ds^2 = d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (7.29)$$

Considérons trois événements correspondant à trois positions voisines de la particule-test. Nommons $t = 0$ et $t = t_f$ les temps associés aux premier et troisième événements. Le temps de l'événement intermédiaire est noté t . L'expression du temps propre τ_1 correspondant à la première partie du trajet (entre les événements 1 et 2 supposés très proches) est :

$$\tau_1 = \left(\left(1 - \frac{2GM}{r_1}\right) t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r_1}\right)^{-1} \Delta r_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.30)$$

où r_1 est la valeur moyenne de r sur cette petite trajectoire et Δr_1 sa variation. On ne considère ici que la dépendance explicite en t du premier terme, le second est, à l'approximation du moyennage infinitésimal, considéré comme indépendant de t . La dérivée de (7.30) s'écrit alors :

$$\frac{d\tau_1}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{r_1}\right) t}{\left(\left(1 - \frac{2GM}{r_1}\right) t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r_1}\right)^{-1} \Delta r_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = \left(1 - \frac{2GM}{r_1}\right) \frac{t}{\tau_1}. \quad (7.31)$$

Sur la deuxième partie du trajet (entre les événements 2 et 3), le temps écoulé est $t_f - t$. Notons r_2 le rayon moyen correspondant et τ_2 le temps propre :

$$\tau_2 = \left(\left(1 - \frac{2GM}{r_2} \right) (t_f - t)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r_2} \right)^{-1} \Delta r_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.32)$$

qui se dérive en :

$$\frac{d\tau_2}{dt} = \frac{-\left(1 - \frac{2GM}{r_2} \right) (t_f - t)}{\left(\left(1 - \frac{2GM}{r_1} \right) (t_f - t)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r_1} \right)^{-1} \Delta r_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = -\left(1 - \frac{2GM}{r_2} \right) \frac{t_f - t}{\tau_2}. \quad (7.33)$$

En nommant $\tau = \tau_1 + \tau_2$, on obtient :

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(1 - \frac{2GM}{r_1} \right) \frac{t}{\tau_1} - \left(1 - \frac{2GM}{r_2} \right) \frac{t_f - t}{\tau_2}. \quad (7.34)$$

Les trajectoires suivies par les particules libres, les géodésiques, sont celles qui extrémisent le temps propre : $\frac{d\tau}{dt} = 0$. Soit, en nommant $t = t_1$ et $t_f - t = t_2$:

$$\left(1 - \frac{2GM}{r_1} \right) \frac{t_1}{\tau_1} = \left(1 - \frac{2GM}{r_2} \right) \frac{t_2}{\tau_2}. \quad (7.35)$$

Autrement dit, on voit apparaître une quantité conservée : le produit du coefficient de courbure par le rapport de l'avance du temps à l'infini sur le temps propre est invariant. Il est raisonnable de définir l'énergie de la particule-test comme étant proportionnelle à cette grandeur :

$$E = \alpha \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\tau}. \quad (7.36)$$

On peut aisément fixer la constante de proportionnalité pour demeurer en accord avec l'énergie telle qu'elle est définie en relativité restreinte. Pour une particule à l'infini, le facteur de courbure est unitaire. Soit :

$$E = \alpha \frac{dt}{d\tau}. \quad (7.37)$$

Or, en relativité restreinte :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{\sqrt{dt^2 - dx^2}} = \frac{dt}{dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} = \gamma = \frac{E}{m}, \quad (7.38)$$

puisque l'énergie totale d'une particule en espace minkowskien est $E = \gamma m$ avec $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - V^2}$. Pour faire coïncider (7.37) et (7.38), nous choisissons donc $\alpha = m$ et obtenons l'énergie d'une particule dans la géométrie de Schwarzschild :

$$E = m \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{dt}{d\tau}. \quad (7.39)$$

7.2.2 Vitesse à l'horizon du trou noir

Considérons une particule au repos à l'infini. Son énergie vaut $E = m$. La conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = 1. \quad (7.40)$$

Soit :

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 dt^2 = d\tau^2. \quad (7.41)$$

En écrivant

$$d\tau^2 = ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (7.42)$$

grâce à (7.25), on obtient en égalant (7.41) et (7.42) :

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2. \quad (7.43)$$

En multipliant par $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$ et en mettant $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2$ en facteur, cela conduit à :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 \left(\frac{2GM}{r}\right). \quad (7.44)$$

Soit, en prenant la racine négative puisqu'on s'intéresse à une particule qui tombe vers le trou noir (r diminue) :

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.45)$$

Le sens physique de ce rapport dr/dt est celui de la variation de la circonférence réduite par unité de temps à l'infini. Manifestement, quand $r \rightarrow 2GM$, $dr/dt \rightarrow 0$. Ce qui signifie que, pour l'observateur à l'infini, la particule n'atteint jamais l'horizon du trou noir ! Elle se fige lentement à l'horizon. On ne voit finalement jamais rien entrer dans un trou noir, la vitesse finit par inexorablement décroître et devient asymptotiquement nulle au fur et à mesure que l'objet approche de l'horizon. Cette vision n'est pas paradoxale. Elle est tout à fait cohérente : les corps chutant sur un trou noir présentent, pour l'observateur lointain, une vitesse qui diminue quand ils approchent de l'horizon, un rayonnement émis se rougissant et une extension spatiale « s'étalant » sur la surface du trou noir. Du point de vue de l'observateur extérieur, il n'y a aucune différence entre de la matière au centre du trou noir ou de la matière sphériquement

répartie à la surface de celui-ci. La question de savoir si la particule est entrée ou non dans le trou noir est essentiellement sans conséquence pour l'observateur extérieur.

Il est intéressant de se demander maintenant ce que mesurerait l'observateur local, c'est-à-dire un observateur-coquille, voisin de l'horizon. Étant donné que

$$dr_{\text{coq}} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr, \quad (7.46)$$

$$dt_{\text{coq}} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (7.47)$$

on obtient à partir de (7.45) :

$$\frac{dr_{\text{coq}}}{dt_{\text{coq}}} = -\left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.48)$$

Pour $r \rightarrow 2GM$, on trouve donc maintenant, $|dr_{\text{coq}}/dt_{\text{coq}}| = 1$. Avec les unités complètes, cette valeur $V_{\text{coq}} = 1$ signifie $V_{\text{coq}} = c$. La particule atteint donc l'horizon avec la vitesse de la lumière !

La situation peut difficilement être plus extrême ! Pour un même processus physique – la chute d'une particule sans vitesse initiale sur un trou noir – nous sommes conduits à deux descriptions extraordinairement différentes : l'observateur lointain voit, à l'horizon, une vitesse nulle (la plus petit possible) tandis que l'observateur local voit, à l'horizon, une vitesse égale à celle de la lumière (la plus grande possible). Qu'en est-il réellement ? Il en est réellement simultanément ainsi ! Les deux descriptions sont « vraies ». Les trous noirs poussent la relativité à ses extrêmes et ces deux résultats sont simultanément justes et parfaitement concordants. Relative réalité.

7.2.3 Orbite autour d'un trou noir

La description générale du mouvement d'une particule test² dans la métrique de Schwarzschild s'obtient par la résolution de l'équation des géodésiques :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \left(\frac{dx^\mu}{dp}\right) \left(\frac{dx^\nu}{dp}\right) = 0. \quad (7.49)$$

Le paramètre affine p a été introduit pour paramétriser la trajectoire. Pour le cas d'une particule massive, ce paramètre p peut être choisi comme le temps propre, $p = \tau$. Cependant, pour un photon (dont la masse est nulle) $d\tau = 0$, et le paramètre p sera

2. Nous appelons ici particule-test tout corps dont l'extension spatiale est suffisamment faible pour être considéré comme ponctuel et la masse-énergie suffisamment faible pour ne pas courber l'espace-temps. Selon la masse du trou noir, une planète ou encore une étoile peuvent entrer dans cette catégorie.

différent du temps propre. Nous ne fixerons pas *a priori* ce paramètre afin de garder la discussion la plus générale possible.

La première étape nécessaire à la résolution de l'équation des géodésiques est le calcul des coefficients de connexion dans la métrique de Schwarzschild. En posant

$$h(r) = g_{tt} = -\frac{1}{g_{rr}} = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (7.50)$$

on peut montrer que les composantes non nulles des coefficients de connexion sont (nous utiliserons la notation $f' = \frac{df}{dr}$) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^r \Rightarrow \Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2}h h', \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{h'}{2h}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r h, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \Gamma_{\theta\theta}^r \sin^2 \theta, \quad (7.51)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\theta \Rightarrow \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad (7.52)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\varphi \Rightarrow \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cotan \theta, \quad (7.53)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^t \Rightarrow \Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = \frac{h'}{2h}. \quad (7.54)$$

Dans le cas d'un champ à symétrie sphérique, il est possible de se limiter au mouvement dans un plan à angle zénithal fixe, *i.e.* $\theta = \text{constante}$. Ainsi, $\frac{d\theta}{dp} = 0$ et la composante $\lambda = \theta$ de l'équation des géodésiques ne sera plus considérée dans la suite. Nous choisirons de plus ce plan comme étant le plan équatorial : $\theta = \pi/2$ (la symétrie sphérique assurant que ce choix est toujours possible). Pour une telle valeur de θ – et après un peu d'algèbre –, les composantes restantes de l'équation des géodésiques sont alors³ :

$$(t) \Rightarrow \frac{d}{dp} \left[h \frac{dt}{dp} \right] = 0 \quad (7.55)$$

$$(\varphi) \Rightarrow \frac{d}{dp} \left[r^2 \frac{d\varphi}{dp} \right] = 0 \quad (7.56)$$

$$(r) \Rightarrow \frac{d^2 r}{dp^2} - \frac{h'}{2h} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - rh \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 + \frac{hh'}{2} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 = 0. \quad (7.57)$$

Intéressons-nous de façon générique à la signification de chacune de ces équations. Comme cela va apparaître clairement, elles se ramènent toutes à des équations de conservation, définissant chacune une constante du mouvement.

3. Les équations (7.55) et (7.56) sont respectivement obtenues en multipliant la composante (t) de l'équation des géodésiques par $h(r)$ et la composante (φ) par r^2 .

- *Composante (t)* : cette première équation montre que la quantité $h \frac{dt}{dp}$ est une constante du mouvement, notée C . Pour le cas particulier d'une particule massive, et en choisissant $p = \tau$, cela aboutit à $\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = C$. Cette équation n'est rien d'autre que la définition de l'énergie de la particule et (conformément au chapitre précédent) nous pouvons fixer $C = \frac{E}{m}$, sachant ici que p coïncide avec le temps propre τ . Ceci ne s'applique toutefois qu'aux particules de masse non nulle et pour garder la discussion la plus générale possible, nous ne fixerons pas *a priori* la valeur de C . Pour une particule massive, puisque $dp = \frac{h(r)}{C} d\tau$ et $d\tau = \frac{m}{E} h(r) dt$, on peut écrire $C d\tau = \frac{E}{m} dp$. Pour un photon, nous pourrions choisir (de façon analogue aux particules massives) $C = E_\gamma$, l'énergie du photon.
- *Composante (φ)* : cette seconde équation affirme que la quantité $r^2 \frac{d\varphi}{dp}$ est elle aussi conservée : $r^2 \frac{d\varphi}{dp} = L$. Cette équation s'interprète comme la conservation du moment angulaire (une conséquence directe de la symétrie sphérique) et L correspond simplement à la valeur de ce moment angulaire.
- *Composante (r)* : si l'on introduit les deux constantes précédentes dans l'équation (7.57) et qu'on multiplie cette dernière par $\frac{h}{2} \frac{dr}{dp}$, la composante (r) de l'équation des géodésiques prend elle aussi la forme manifeste d'une équation de conservation :

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{1}{h(r)} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{C^2}{h(r)} \right] = 0. \quad (7.58)$$

La quantité $\mathcal{E} = \frac{1}{h(r)} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{1}{h(r)}$ est donc une constante du mouvement. De façon qualitative et quelque peu approximative (quoique suffisante pour une première lecture de l'équation (7.58)), le premier terme de $\mathcal{E}$ (proportionnel au carré de $\frac{dr}{dp}$) ressemble fortement à un terme d'énergie cinétique tandis que les deux autres termes ressemblent à l'énergie potentielle due au potentiel centrifuge et au potentiel gravitationnel. Ainsi, $\mathcal{E}$ serait l'*analogue* de l'énergie totale du système et l'équation (7.58) serait l'*analogue* de la conservation de l'énergie totale (qui se répartit entre énergie cinétique et énergie potentielle) en mécanique classique. De façon plus rigoureuse, la détermination de $\mathcal{E}$ procède de la manière suivante. Avec $d\tau^2 = ds^2$ et en injectant toutes ces constantes du mouvement – i.e. $dt = C dp/h(r)$, $d\varphi = L dp/r^2$ et $dr^2 = (C^2 - h(r) \frac{L^2}{r^2} + h(r) \mathcal{E}) dp^2$ – dans la définition de l'intervalle, nous trouvons

$$d\tau^2 = -\mathcal{E} dp^2. \quad (7.59)$$

Puisque $d\tau = C \frac{E}{m} dp$ pour une particule massive, on voit donc que $\mathcal{E} = -\left(\frac{E}{Cm}\right)^2$. Ainsi $\mathcal{E}$ est toujours négative pour les particules de masse non nulle. Toutefois, pour les photons $ds^2 = 0$ et ainsi, pour que le paramètre affine p soit clairement défini, $\mathcal{E} = 0$.

Cette dernière équation de conservation de l'énergie totale permet de lire aisément les trajectoires possibles en comparant l'énergie totale de la particule à son énergie potentielle. Il apparaît d'une part l'existence d'orbites liées stables ou instables, et d'autre part, l'existence d'orbites libres (ou *non liées*).

Pour une particule massive, l'équation du mouvement reliant r à p se réécrit

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 = \left[\left(\frac{E}{Cm}\right)^2 - \left(\frac{L^2}{r^2} - \frac{C^2}{h(r)}\right)\right]. \quad (7.60)$$

Pour que p coïncide avec le temps propre, il faut fixer $C = \frac{E}{m}$. L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\left(m \frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - m^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (7.61)$$

Cette équation s'interprète simplement. Le membre de gauche n'est autre que le carré de l'impulsion de la particule, notons-la P . Le premier terme du membre de droite correspond au carré de l'énergie totale. Enfin, le deuxième terme du membre de droite correspond au carré du potentiel total⁴, noté $V(r)$. Ce potentiel effectif se compose d'un potentiel centrifuge et gravitationnel, donné par $V_{L,M}^2(r) = m^2 \left(\frac{L^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} - \frac{2GML^2}{r^3}\right)$, et d'un terme de masse, donné par $V_m^2(r) = m^2$. Cette équation s'interprète donc comme $E^2 = P^2 + V^2(r)$. Par ailleurs, $V(r \rightarrow \infty) = m^2$ et cette équation, lorsque l'on se place infiniment loin de la source gravitationnelle, se ramène tout naturellement à l'équation usuelle de la relativité restreinte : $E^2 = P^2 + m^2$. De façon générique, le potentiel s'annule toujours en $r = 2GM$ (c'est à dire au niveau de l'horizon du trou noir) et tend toujours vers m^2 quand $r \rightarrow \infty$. Selon la valeur de L , le potentiel peut alors avoir trois comportements différents. C'est à partir de ces comportements qu'il est possible de déduire le type d'orbite⁵. Pour cela, nous considérons que la particule est au départ loin du trou noir.

- Cas $0 \leq L < 2\sqrt{3}GM$: pour r allant de $2GM$ à l'infini, le potentiel croît monotoniquement de 0 à m^2 . Dans cette situation, les particules massives tomberont inexorablement dans le trou noir : il s'agit d'orbites liées instables.
- Cas $L > 2\sqrt{3}GM$: le potentiel va présenter une barrière puis un puits de potentiel. Plus particulièrement, de $r = 2GM$ jusqu'à

$$r_{\max} = \frac{L^2}{2GM} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12(GM)^2}{L^2}}\right), \quad (7.62)$$

⁴. Ce terme est parfois interprété comme le potentiel plutôt que comme son carré. Cela n'est toutefois ici qu'affaire de convention.

⁵. Il est important de garder à l'esprit que pour $L \neq 0$, la trajectoire n'est pas purement radiale. La particule va donc partiellement ou indéfiniment tourner autour du trou noir dans le plan équatorial.

le potentiel va croître de zéro jusqu'à une valeur $V_{\max}$. Selon la valeur du moment angulaire, $V_{\max}$ peut être supérieure ou inférieure à m . Ensuite, de $r = r_{\max}$ jusqu'à

$$r_{\min}(> r_{\max}) = \frac{L^2}{2GM} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12(GM)^2}{L^2}} \right), \quad (7.63)$$

le potentiel va décroître de $V_{\max}$ jusqu'à $V_{\min}$ tel que $V_{\min} < V_{\max}$ et $V_{\min} < m$. Le potentiel va finalement croître à nouveau de $V = V_{\min}$ en $r = r_{\min}$ jusqu'à $V = m$ en $r \rightarrow +\infty$. Dans le cas le plus riche de conséquences où $V_{\max} > m$, il y a donc maintenant trois possibilités :

- $E > V_{\max}(> m)$: les particules massives tomberont dans le trou noir. Il s'agit de nouveau d'orbites liées instables.
 - $m < E < V_{\max}$: la particule va s'approcher du trou noir pour être diffusée par la barrière de potentiel et enfin s'échapper de l'attraction du trou noir (non sans avoir partiellement tourné dans le plan équatorial). Il s'agit là d'orbites libres.
 - $V_{\min} \leq E < m$: la particule va alors suivre une orbite liée et stable autour du trou noir sans jamais tomber dedans. Comme on pouvait s'y attendre, les particules massives (par exemple une étoile de notre galaxie) peuvent avoir un mouvement de révolution autour d'un trou noir (par exemple le trou noir au centre de notre galaxie). Si $E = V_{\min}$, cette orbite est circulaire. Si $E > V_{\min}$, l'orbite sera une ellipse précessante⁶.
- Cas $L = 2\sqrt{3}GM$: le potentiel croît monotoniquement de $V = 0$ en $r = 2GM$ jusqu'à $V = m$ en $r \rightarrow \infty$. Toutefois, à la différence du cas $0 \leq L < 2\sqrt{3}GM$, le potentiel présente un *point selle* en $r = 6GM$, c'est à dire un point où la dérivée du potentiel s'annule *mais* ne change pourtant pas de signe. Ainsi, en $r = 6GM$, une orbite liée et stable existe sous forme d'une orbite circulaire. Cette orbite correspond d'ailleurs à la plus petite orbite stable : si une particule atteint une distance $r < 6GM$, alors sa trajectoire devient nécessairement une orbite liée *instable* et la particule tombe dans le trou noir.

Pour un photon, puisque $\mathcal{E} = 0$, l'équation du mouvement est alors

$$\left(\frac{dr}{dp} \right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} \left[C^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \frac{L^2}{r^2} \right]. \quad (7.64)$$

En choisissant $C = E_\gamma$, on retrouve en $r \rightarrow \infty$ l'équation usuelle de la relativité restreinte pour un photon : $E_\gamma^2 = P^2$. Le potentiel effectif est maintenant donné par

6. Ce mouvement d'orbite elliptique précessante a permis de finaliser l'explication de la précession du périhélie de Mercure.

$V^2(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}$ et correspond à une *barrière* de potentiel : il croît de $V = 0$ en $r = 2GM$ à $V_{\max} = L^2/27(GM)^2$ en $r = 3GM$ pour ensuite décroître jusqu'à $V = 0$ en $r \rightarrow \infty$. Pour un photon, il n'y aura donc que deux types d'orbites possibles :

- cas $E_\gamma > V_{\max}$: cela signifie que le moment angulaire est faible. Le photon suivra une orbite liée instable et tombera dans le trou noir ;
- cas $E_\gamma < V_{\max}$: le photon va alors être diffusé par la barrière de potentiel et pourra s'échapper de l'attraction gravitationnelle du trou noir, non sans avoir partiellement tourné dans le plan équatorial. Il s'agit de la déflexion de la lumière, un des tout premiers tests observationnels de la relativité générale.

On voit donc ici un point important. Bien que la trajectoire des photons soit déviée par la présence du trou noir, il n'existe pas d'orbite liée et stable. Ainsi, il est impossible de considérer des photons effectuant durablement un mouvement de révolution autour d'un trou noir.

7.3 À L'INTÉRIEUR DU TROU NOIR

7.3.1 L'horizon est-il singulier ?

Un trou noir n'attire pas plus les corps extérieurs que n'importe quel autre objet de même masse (la métrique de Schwarzschild décrivant la géométrie de l'espace-temps à l'extérieur de n'importe quelle source gravitationnelle à symétrie sphérique, que ce soit un trou noir ou une planète). Au moins, quand on se tient à distance respectable de celui-ci. L'orbite d'une planète ne serait presque pas modifiée si l'étoile autour de laquelle elle se meut devenait un trou noir de même masse. Les choses se compliquent quand on s'approche de l'horizon. Comme on vient de le montrer, quand on se trouve à moins de $6GM$, soit trois fois le rayon de Schwarzschild, il n'y a plus d'orbite stable. Et, naturellement, quand on s'approche à moins de $2GM$, il est impossible de revenir vers l'extérieur du trou noir. Se passe-t-il quelque chose de particulier en $r = r_s = 2GM$? La métrique (7.25) semble diverger pour $r = r_s$. Qu'en est-il exactement ?

Pour passer des coordonnées « coquilles » à celles de l'observateur en chute libre, il faut procéder à une transformation de Lorentz :

$$dt_{\text{chute}} = -\gamma V_{\text{rel}} \times dr_{\text{coq}} + \gamma \times dt_{\text{coq}}, \quad (7.65)$$

où V_{rel} est la vitesse relative locale entre les deux référentiels. En utilisant (7.46) et (7.47), ceci s'écrit :

$$dt_{\text{chute}} = -\frac{\gamma V_{\text{rel}} dr}{\left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} + \gamma \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (7.66)$$

Soit encore :

$$dt = \frac{dt_{\text{chute}}}{\gamma \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{V_{\text{rel}} dr}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}. \quad (7.67)$$

Or $V_{\text{rel}} = \frac{dr_{\text{coq}}}{dt_{\text{coq}}} = -\left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$, comme montré en (7.48). Donc

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V_{\text{rel}}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}}. \quad (7.68)$$

En reportant dans (7.67), on obtient :

$$dt = dt_{\text{chute}} - \frac{\left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dr}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}. \quad (7.69)$$

Reste maintenant à reporter cette expression de dt dans la métrique de Schwarzschild (7.25) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left[dt_{\text{chute}}^2 - 2 dt_{\text{chute}} \frac{\left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dr}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} + \frac{\left(\frac{2GM}{r}\right) dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2} \right] - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}}. \quad (7.70)$$

En mettant au même dénominateur et en simplifiant, on obtient immédiatement :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt_{\text{chute}}^2 - 2 \left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt_{\text{chute}} dr - dr^2. \quad (7.71)$$

Naturellement, ce système de coordonnées est « hybride ». Mais cela ne lui ôte aucune légitimité. Le point fondamental que nous souhaitions ici souligner est que dans la forme (7.71) la métrique n'est clairement *plus* singulière ! La pathologie en $r = 2GM$ a disparu. Il s'agissait d'une singularité de coordonnées uniquement liée au choix des coordonnées de Schwarzschild et pas du tout à la structure intrinsèque de l'espace-temps⁷. Autrement dit, il ne se passe rien de particulier quand on franchit l'horizon. Un observateur en chute libre sur un trou noir suffisamment massif (si le trou noir était trop petit, l'effet de marée serait si intense que le voyageur spatial serait disloqué bien

7. On peut d'ailleurs s'en convaincre en notant que le tenseur d'Einstein, description de la courbure de l'espace-temps, est proportionnel au tenseur énergie-impulsion qui est *régulier* par construction en $r = 2GM$.

avant l'horizon) pourrait entrer dans celui-ci et ne ressentirait rien de spécial une fois le rayon de Schwarzschild franchi. C'est analogue aux pôles d'une sphère : en coordonnées sphériques, ce sont des points singuliers. Pourtant, rien de particulier ne s'y produit, leur spécificité est artéfactuelle et liée à un choix particulier de coordonnées. En revanche, la singularité centrale (où se trouve toute la masse du trou noir) est une singularité réelle. La densité ρ est infinie et le tenseur de Riemann R diverge.

7.3.2 L'impossible retour

En physique newtonienne, il est, par définition, impossible de s'extraire d'un trou noir. En relativité générale, nous avons défini le trou noir comme la zone de l'espace-temps pour laquelle $r < 2GM$. Il faut se convaincre qu'il est effectivement impossible de s'extraire de celle-ci, ce qui n'est pas nécessairement *a priori* évident.

Comme nous l'avons mentionné, dans le trou noir, les coordonnées r et t s'échangent mutuellement (les signes des facteurs de dt et de dr changent). La coordonnée t devient du genre espace et la coordonnée r du genre temps. Ce qui signifie intuitivement que l'évolution de r (vers la singularité centrale) est aussi inexorable que celle de t hors du trou noir⁸. On ne peut en aucun cas échapper à la singularité centrale. Pire encore, si l'on utilisait un « moteur de fusée » pour tenter de ralentir la chute, les choses ne feraient qu'empirer !

Cherchons le comportement des photons à l'intérieur d'un trou noir. Pour des événements de type lumière, l'intervalle est nul, soit, à partir de (7.71) :

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt_{\text{chute}}^2 - 2\left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt_{\text{chute}} dr - dr^2 = 0, \quad (7.72)$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{dr^2}{dt_{\text{chute}}^2} + 2\left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{dt_{\text{chute}}} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = 0. \quad (7.73)$$

On peut résoudre simplement cette équation du second degré par rapport à $\frac{dr}{dt_{\text{chute}}}$. Son discriminant vaut 4 et les solutions sont :

$$\frac{dr}{dt_{\text{chute}}} = -\left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \pm 1. \quad (7.74)$$

Puisque l'on s'intéresse à l'intérieur du trou noir, $r < 2GM$ et les deux solutions sont donc négatives. Or, étant donné qu'on suppose implicitement dans l'écriture

⁸. On pourrait dire de façon imagée qu'en deçà de l'horizon, l'espace s'écoule inexorablement vers la singularité centrale.

simplifiée de la métrique qu'il n'y a pas de terme angulaire, cela signifie qu'on étudie les mouvements radiaux. Imaginons un flash dans un trou noir émettant deux photons diamétralement opposés et parallèles au rayon passant par le centre du trou noir et le flash. Les deux solutions de (7.74) correspondent au photon qui va vers le centre et à celui qui va vers l'extérieur. Mais les deux présentent des variations du rayon négatives. Cela signifie que les deux photons vont en fait vers le centre ! Même le photon émis vers l'extérieur va, en réalité, vers l'intérieur... Ce qui montre bien que même la lumière ne peut s'extraire d'un trou noir. Tout, même le photon émis dans la direction opposée, finit sur la singularité.

7.3.3 Dans le trou noir

Une fois l'horizon passé, et bien que plus aucun retour vers l'extérieur ni aucune manière d'échapper à la singularité centrale ne soit envisageable, un certain temps peut encore s'écouler avant la mort certaine associée à l'écrasement sur la singularité. Considérons que l'on se dirige vers le centre du trou noir avec une vitesse nulle à l'infini. L'équation (7.39) s'écrit :

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{dr} = 1. \quad (7.75)$$

Par ailleurs, en prenant la racine négative de (7.45), qui correspond au mouvement vers le trou noir, on obtient :

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.76)$$

En écrivant $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dr}$, on obtient avec (7.75) et (7.76), $\frac{dr}{dt} = -\left(\frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$. Soit, si l'on souhaite évaluer le temps propre écoulé entre le franchissement de l'horizon et la singularité centrale :

$$\tau = -\int_{2GM}^0 \left(\frac{r}{2GM}\right)^{\frac{1}{2}} dr = \frac{4}{3}GM. \quad (7.77)$$

En rétablissant les unités complètes, l'application numérique montre que ce temps est de l'ordre de quelques microsecondes pour un trou noir de quelques masses solaires mais s'élève à plusieurs heures pour un trou noir supermassif d'un milliard de masses solaires. La mort, dans un trou noir, est inéluctable mais pas instantanée !

7.4 UN PEU PLUS LOIN

7.4.1 Effet Hawking

Pourquoi disions-nous que les trous noirs massifs étaient moins « extrêmes » que les petits trous noirs au sens où les forces de marées étaient plus petites à l'horizon

des premiers que des seconds ? On peut aisément le comprendre dès l'approximation Newtonienne. Le champ gravitationnel s'écrit $|G| \propto \frac{M}{r^2}$. À l'horizon, il s'écrit donc $|G| \propto \frac{M}{r_s^2}$. Mais $r_s \propto M$. Le champ s'écrit donc : $|G| \propto \frac{1}{M}$: il est, à l'horizon, d'autant plus intense que le trou noir est peu massif. Ce n'est pas paradoxal : dans l'expression du champ, la masse joue linéairement tandis que la distance joue quadratiquement. Ce qu'on perd, avec les petits trous noirs, à la puissance 1, on le gagne, à la puissance 2, car l'horizon est plus proche du centre. Évidemment, tout cet effet repose sur le fait que le rayon d'un trou noir varie linéairement avec sa masse. Ce qui n'est pas le cas avec de la matière ordinaire pour laquelle le rayon varie typiquement comme la puissance 1/3 de la masse.

Le fait que le champ de gravité (ainsi que l'effet de marée) à la surface d'un trou noir est d'autant plus élevé que la masse du trou noir est faible a une autre conséquence fort intéressante : l'effet Hawking.

De façon définitoire, rien ne peut s'extraire d'un trou noir. C'est classiquement inévitable. Mais les choses se compliquent un peu lorsque la mécanique quantique s'invite dans le jeu. Par analogie avec l'effet tunnel, on peut d'ores et déjà s'attendre à ce qu'une trajectoire classiquement interdite, comme traverser l'horizon du trou noir de l'intérieur vers l'extérieur, soit cependant autorisée au niveau quantique. Suivant cette idée, il a été montré par Hartle & Hawking que la probabilité quantique de *sortir* de l'intérieur d'un trou noir n'est pas nulle. De façon plus quantitative, il est possible d'établir que la distribution en énergie (*i.e.* la densité d'états quantiques) de particules traversant l'horizon par effet tunnel et s'échappant du trou noir sera une distribution presque *thermique* de corps noir.

Par ailleurs, le vide ne fait sens qu'en moyenne. Ainsi, principe d'incertitude d'Heisenberg oblige, un tel état physique est perpétuellement animé de fluctuations quantiques sous la forme de création puis annihilation de paires particule/antiparticule. Ces paires s'annihilent généralement très rapidement. Au voisinage de l'horizon d'un petit trou noir, là où la courbure est gigantesque, l'effet de marée (en termes classiques) peut cependant permettre de séparer les deux particules de la paire. L'une entre dans le trou noir et l'autre est éjectée vers l'infini. L'observateur éloigné du trou noir observe donc un flux de particules issu de celui-ci ! La conservation de l'énergie impose naturellement que la masse du trou noir diminue. Contrairement à ce qui pouvait donc être intuitivement attendu, les petits trous noirs ne sont donc pas noirs du tout : ils rayonnent une quantité colossale d'énergie. Cet effet n'a jamais été observé car les trous noirs usuels de l'astrophysique sont beaucoup trop massifs pour qu'un tel rayonnement soit conséquent. Le spectre émis par les trous noirs microscopiques est presque thermique, caractérisé par une température

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M}, \quad (7.78)$$

où nous avons utilisé les unités complètes pour souligner le caractère exceptionnel de cette formule : elle est l'une des seules à faire intervenir toutes les constantes fondamentales de la physique. Le fait que la constante de Planck, la constante de Boltzmann, la vitesse de la lumière et la constante de Newton interviennent simultanément témoigne de ce qu'ici mécanique quantique, gravitation relativiste et thermodynamique sont simultanément à l'œuvre. Les trous noirs en évaporation sont donc des objets privilégiés pour mettre à l'épreuve des théories d'unification.

Dans ce contexte, il est légitime de se demander si d'autres astres suffisamment compacts pour que leurs forces de marées soient extrêmement intenses (comme une étoile à neutron), pourraient s'évaporer eux aussi par effet Hawking. Il n'en est rien. Un élément nécessaire à la brisure des fluctuations quantiques du vide est la présence d'un *horizon d'événement* dans la structure causale de l'espace-temps. On peut comprendre cette nécessité de la manière suivante : une partie des fluctuations quantiques du vide à proximité d'un trou noir correspond au cas où une des deux particules de la paire se trouve *en deçà* de l'horizon (à l'intérieur du trou noir) tandis que l'autre se trouve *au-delà* de l'horizon (à l'extérieur du trou noir). Or, pour un observateur à l'extérieur du trou noir, seule la particule *externe* est observable et il lui semble donc qu'un flux de particules est émis par le trou noir. Cet horizon est bien présent pour un trou noir mais il n'existe pas pour les autres astres. Ainsi, les étoiles à neutrons ou encore notre Soleil ne s'évaporent pas par effet Hawking. Et cette impossibilité n'est pas d'ordre cinétique (comme pour les trous noirs supermassifs pour lesquels le taux d'émission de particules par effet Hawking, et donc le taux d'évaporation, est ridiculement faible quoique non nul) mais bien fondamentalement impossible, les fluctuations du vide se recombinaient systématiquement.

Peu avant la découverte de Hawking, Bekenstein avait montré que les trous noirs possèdent une entropie proportionnelle à leur aire. Il s'ensuivit le développement de toute la thermodynamique des trous noirs qui s'est avérée remarquablement similaire à celle des corps ordinaires. À quelques différences notables près. Par exemple, on voit dans (7.78) que plus le trou noir perd de l'énergie en rayonnant, plus sa masse diminue et plus sa température... augmente ! L'évaporation de Hawking est donc un processus très explosif. Ce qui n'est pas surprenant quand on le comprend au niveau microscopique (quand le trou noir perd de la masse, sa gravité de surface augmente) mais s'inscrit en faux par rapport à l'intuition macroscopique usuelle.

On peut facilement se convaincre de la nécessité d'attribuer une entropie aux trous noirs par l'expérience de pensée suivante. Considérons un espace-temps muni d'un trou noir de masse M et d'un ballon rempli d'un gaz de particules auquel sont associés une énergie E et une entropie S . Initialement, le ballon est à l'extérieur du trou noir. Supposons qu'un trou noir n'a *pas* d'entropie. L'énergie totale et l'entropie totale sont initialement $E_{\text{totale}} = E + M$ et $S_{\text{totale}} = S$. Le ballon est ensuite lancé à l'intérieur du trou noir. Pour un observateur à l'extérieur, l'espace-temps final ne comporte plus qu'un trou noir de masse $M + E$ et d'entropie nulle

(par hypothèse). L'énergie totale et l'entropie totale finales sont alors $E_{\text{totale}} = E + M$ et $S_{\text{totale}} = 0$; l'entropie de l'espace-temps a *diminué*. Ce qui est en conflit avec le second principe de la thermodynamique. Comme le comprit Bekenstein, il devient nécessaire d'associer une entropie à un trou noir pour résoudre ce paradoxe. Démontrer que cette entropie est proportionnelle à l'aire de l'horizon du trou noir est au-delà des objectifs de ce livre. On peut toutefois noter que, comme démontré par Hawking, l'aire d'un trou noir ne peut qu'*augmenter* lors de processus classiques, ce qui est aussi une propriété essentielle de l'entropie.

Mais si l'entropie d'un trou noir est proportionnelle à la surface de son horizon et que, par effet Hawking, le trou noir s'évapore (perdant de sa masse et *réduisant* son aire), alors l'entropie *diminuerait* de nouveau par ce processus quantique. Toutefois, l'entropie emportée par les particules rayonnées lors de l'évaporation correspond à une augmentation d'entropie nécessairement supérieure à la diminution d'entropie du trou noir. Ainsi, la variation globale de l'entropie va toujours dans le sens d'un accroissement.

De façon plus importante encore, la découverte de l'effet Hawking a joué un rôle moteur dans le développement de la théorie quantique des champs en espace courbe. Outre les difficultés techniques, un certain nombre de complications conceptuelles voient ici le jour. En théorie quantique des champs, au moins pour ce qui est de sa formulation moderne, il est fait grand usage des symétries du groupe de Poincaré⁹ et de la notion d'observateur inertiel. Le vide est défini comme l'état invariant sous l'action des transformations du groupe de Poincaré. Ce choix n'est évidemment pas anodin : puisque le groupe de Poincaré inclut l'ensemble des symétries d'espace-temps de la relativité restreinte, que l'état vide (de particule) soit invariant sous l'action de ce groupe signifie que le vide est identique pour tous les référentiels (et donc tous les observateurs) inertiels. L'espace des états à une particule est construit comme un espace de Hilbert¹⁰ portant une représentation irréductible du groupe de Poincaré. Des opérateurs de création et d'annihilation (et un espace de Fock¹¹) sont construits à partir de ces états, et la notion de champ n'apparaît que bien plus tardivement pour calculer les interactions. Le terme d'interaction doit lui aussi se transformer sous une représentation irréductible du groupe de Poincaré. Cette démarche, fondée sur les symétries, est tout à fait en accord avec les principes fondateurs de la physique des particules. Mais il faut bien se convaincre qu'elle devient totalement inutilisable dès lors

9. Défini rigoureusement, le groupe de Poincaré inclut l'ensemble des symétries de la relativité restreinte : les translations, les rotations, le renversement du temps, la parité, et les transformations de Lorentz.

10. Les espaces de Hilbert sont fondamentaux en mécanique quantique. Ils généralisent la notion d'espace euclidien. Ce sont des espaces vectoriels munis d'un produit interne qui permet de mesurer les angles et les distances. Ils sont de plus complets, ce qui signifie intuitivement que les techniques de calcul usuelles peuvent y être utilisées.

11. On utilise les espaces de Fock en mécanique quantique pour décrire des états à nombre variable de particules. Ils sont obtenus par somme directe de produits tensoriels d'espace de Hilbert.

qu'on travaille sur un espace-temps quelconque dans lequel l'invariance de Lorentz globale est perdue et où il est impossible de définir proprement un observateur inertiel privilégié. En réalité, il n'existe pas de manière absolument non équivoque de construire une théorie quantique des champs en espace courbe. Différentes constructions conduisent généralement à différents vides et à différents nombres de particules. Ce qui signifie finalement qu'en présence de gravitation le concept de particule n'est, lui-même, pas clairement défini. Manifestement la relativité générale pousse à de profondes déconstructions.

7.4.2 Un effet similaire en cosmologie

Un effet similaire à l'évaporation des trous noirs a aussi lieu dans le cadre de la cosmologie. Un univers en expansion est lui aussi sujet à ces fluctuations incessantes du vide quantique. On pourrait alors imaginer que lors d'une expansion suffisamment rapide, la distance entre les deux particules virtuelles des fluctuations soit tellement étirée que ces deux particules ne puissent se ré-annihiler. Cela peut effectivement avoir lieu, mais des conditions spécifiques sont requises.

Il ne s'agit pas ici de fournir une démonstration rigoureuse de ce processus mais plutôt de présenter un raisonnement intuitif.

Un univers en expansion présente un horizon causal. Cet horizon causal est donné par la distance de Hubble, définie comme l'inverse du paramètre de Hubble. En adoptant les notations du chapitre 6, cette distance causale vaut $d_H(t) = c \times (a/\dot{a})$ et dépend donc du temps cosmique¹². Si à un temps donné, la distance comobile entre deux observateurs (ou deux événements physiques) est plus petite que $d_H(t)$, alors ces deux observateurs peuvent échanger de l'information (par exemple en émettant et recevant des photons). Ces deux événements sont en *contact causal*. Inversement, si leur séparation est supérieure à d_H , alors les deux observateurs ne pourront pas communiquer : ils sont causalement déconnectés. Cette distance de Hubble (ou distance causale), définit la taille de l'Univers observable à un instant donné.

Par ailleurs, de par le principe d'incertitude d'Heisenberg, l'extension spatiale physique caractéristique d'une fluctuation quantique du vide est : $d_{\text{quantum}} = \hbar/p(t)$ où p est l'impulsion physique des particules de la fluctuation, donnée par l'inverse de la longueur d'onde de Louis de Broglie de la fluctuation. Or, la longueur d'onde de Louis de Broglie est étirée par l'expansion cosmique. Si on appelle $\bar{p}$ l'impulsion comobile (donc indépendante du temps cosmique), l'extension spatiale de la fluctuation quantique est

$$d_{\text{quantum}}(t) \simeq \frac{\hbar}{\bar{p}} \times a(t). \quad (7.79)$$

12. Nous réintroduisons ici volontairement les constantes physiques c et $\hbar$.

Comme on pouvait s'y attendre, l'extension spatiale d'une fluctuation quantique est étirée par l'expansion cosmique.

La question d'un possible « effet Hawking » cosmologique consiste donc à savoir si $d_{\text{quantum}}(t)$ peut être supérieure à $d_H(t)$. Si tel est le cas, alors la fluctuation devient *acausale* : les deux particules virtuelles de la paire ne peuvent se ré-annihiler et la fluctuation quantique du vide, tout comme dans le cas des trous noirs, est *brisée*. Si tel n'est pas le cas, la paire particule/antiparticule peut se recombiner. Le rapport (distance de Hubble)/(distance quantique) vaut

$$\frac{d_H(t)}{d_{\text{quantum}}(t)} \simeq \frac{c}{\hbar} \times \bar{p} \times \frac{1}{\dot{a}}. \quad (7.80)$$

Si ce rapport est plus petit que 1, alors l'effet Hawking cosmologique a bien lieu – ce qui aboutit à $\dot{a}(t) > c\bar{p}/\hbar$. Autrement dit, seules les fluctuations du vide dont l'échelle de longueur à un instant donné est plus grande que la taille de l'Univers observable à ce même instant, sont sujettes à l'effet Hawking cosmologique. Nous pouvons maintenant considérer deux types d'expansion :

- *expansion décélérée* ($\ddot{a} < 0$) : dans ce cas, $\dot{a}$ diminue et le rapport (distance de Hubble)/(distance quantique) augmente. En d'autres termes, la distance de Hubble croît plus rapidement que la taille caractéristique des fluctuations quantiques du vide. Ainsi, bien qu'il soit *a priori* possible d'avoir l'effet Hawking, celui-ci disparaîtra au fur à mesure de l'expansion de l'Univers. Cette disparition aura lieu plus tôt pour les fluctuations de faibles impulsions, c'est à dire les grandes échelles de longueur.
- *expansion accélérée* ($\ddot{a} > 0$) : dans ce cas, $\dot{a}$ augmente et le rapport (distance de Hubble)/(distance quantique) diminue : la distance de Hubble croît *moins* rapidement que la taille caractéristique des fluctuations quantiques du vide. Dans un Univers en expansion accélérée, l'effet Hawking cosmologique s'emballe et de plus en plus de fluctuations du vide, correspondant à des échelles de longueurs comobiles de plus en plus petites, vont subir cet effet. On voit donc ici qu'une expansion accélérée est une condition quantitativement nécessaire à l'effet Hawking cosmologique.

Une étude plus rigoureuse de ce phénomène montre que l'impulsion comobile des particules doit se comparer à $(\ddot{a}/a)$. L'effet Hawking cosmologique aura alors lieu si $\bar{p} < \ddot{a}/a$. Ainsi, une expansion accélérée est non seulement quantitativement favorable à l'effet Hawking cosmologique, mais aussi nécessaire !

7.4.3 Structure causale

Enfin, sans entrer dans des détails qui demanderaient une étude bien plus poussée que celle de cet ouvrage introductif, il peut être fructueux de souligner que, même

en ignorant les effets quantiques, les trous noirs sont des objets plus complexes que ce que les deux premiers paragraphes de ce chapitre peuvent laisser penser. On a coutume, en relativité générale, de représenter la structure des espace-temps suffisamment symétriques par un diagramme dit de Penrose-Carter. L'intérêt de cette représentation est de faire figurer sur un schéma de taille finie toute la structure causale de l'espace-temps. Le temps y est représenté verticalement et l'espace horizontalement. Pour « faire tenir » tout l'espace-temps dans le diagramme, on procède à des transformations dites conformes (c'est-à-dire préservant les angles¹³). Une telle représentation est fort utile parce que les rayons de lumière s'y déplacent à 45 degrés et l'ensemble des relations causales s'y lit immédiatement. Or, dans ces diagrammes de Penrose-Carter, la singularité des trous noirs de Schwarzschild apparaît comme une ligne horizontale et non pas verticale. Ce qui signifie que cette singularité n'est pas de type temps (un point fixe où le temps passe) mais de type espace (une zone spatiale à un instant donné). Le long de la ligne de singularité du diagramme, le temps ne s'écoule pas. Elle n'est donc pas, contrairement à ce qu'on pourrait penser à première vue, un point de l'espace visible à tout instant mais plutôt un ensemble de points d'espace visibles à un temps donné.

Les trous noirs de Schwarzschild sont les plus simples. On peut montrer que les trous noirs les plus généraux sont décrits par trois paramètres : masse, charge électrique et moment angulaire. Dès lors, le diagramme de Penrose-Carter devient beaucoup plus complexe encore, les singularités y sont alors verticales (de type temps) et une infinité d'autres univers y apparaissent. Probables artefacts mathématiques, ils n'en demeurent pas moins énigmatiques et fascinants.

Exercices

7.1 Métrique statique et à symétrie sphérique

On se propose dans, cet exercice, de se familiariser avec le calcul des tenseurs impliqués dans la résolution des équations d'Einstein dans le cas « simple » des métriques statiques et à symétrie sphérique. Ce type de métrique est complètement déterminé par la connaissance de deux fonctions dépendant uniquement de la coordonnée radiale r

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

13. Deux métriques sont conformes si l'on passe de l'une à l'autre par multiplication par une fonction positive.

On pourra adopter la notation $f'(r) \equiv \frac{df}{dr}$ avec f une fonction dépendant de r .

1. Donnez les composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, de son inverse $g^{\mu\nu}$, et de son déterminant g .
2. Donnez les expressions de Γ_{rr}^r , Γ_{tt}^r , $\Gamma_{r\theta}^\theta$ et Γ_{tr}^t en fonction de r , des fonctions A , B et de leurs dérivées.

Les autres composantes non nulles des coefficients de connexion sont $\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}$, $\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{A}$, $\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$, $\Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}$, $\Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cotan \theta$ ainsi que $\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta$ et $\Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t$.

On s'intéresse maintenant au tenseur de Ricci.

3. Donnez l'expression de R_{tt} en fonction de r , des fonctions A , B et de leurs dérivées (premières et secondes).
4. Donnez l'expression de R_{rr} en fonction de r , des fonctions A , B et de leurs dérivées (premières et secondes).

Les deux autres composantes non nulles du tenseur de Ricci sont

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{r}{2A} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{A}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta \times R_{\theta\theta}.$$

Remarque

Les coefficients de connexion et le tenseur de Ricci sont donnés par

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho.$$

7.2 Métrique de Schwarzschild avec constante cosmologique

Le but de cet exercice est d'établir la métrique de Schwarzschild dans le cas des équations d'Einstein avec constante cosmologique. On cherchera ici à montrer qu'à l'extérieur d'une source de masse M , la métrique est

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

1. Rappelez les équations d'Einstein avec constante cosmologique.
2. En calculant la trace des équations d'Einstein, montrez que $R = -8\pi G T_\lambda^\lambda - 4\Lambda$. En déduire la « deuxième » forme des équations d'Einstein reliant $R_{\mu\nu}$ à $T_{\mu\nu}$, T_λ^λ , $g_{\mu\nu}$ et Λ .
3. Rappelez les expressions de R_{tt} , R_{rr} , $R_{\theta\theta}$ et $R_{\varphi\varphi}$ pour une métrique statique et à symétrie sphérique. (On se reportera à l'énoncé (et à la correction si besoin) de l'exercice précédent.)

Nous considérons tout d'abord un espace-temps *strictement* vide, i.e. $T_{\mu\nu} = 0$ partout.

4. Donnez les composantes (tt) , (rr) et $(\theta\theta)$ des équations d'Einstein avec constante cosmologique.
5. Montrez que $\left(\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} + \frac{2R_{\theta\theta}}{r^2}\right) = \frac{2}{r^2} \left[1 - \left(\frac{r}{A}\right)'\right]$. Déterminez alors la fonction A à l'aide des équations d'Einstein. (On appellera K_1 la constante d'intégration.)
6. À l'aide de $\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A}$, montrez que $B(r) = \frac{K_2}{A(r)}$ avec K_2 une constante. (On pourra s'intéresser à la dérivée de $\ln(A \times B)$.)
7. Montrez que $R = -8\pi G T^\lambda_\lambda - 4\Lambda$ est vrai, indépendamment des valeurs de K_1 et K_2 .
8. Quelle est la nature de l'espace-temps si $\Lambda = 0$? En déduire les valeurs de K_1 et K_2 .

On ajoute maintenant un gaz parfait de poussières au repos, de pression nulle et de densité d'énergie ρ_E telle que $\rho_E(r > R) = 0$. On notera u_μ la quadrivitesse de ce fluide.

9. Rappelez l'expression du tenseur énergie-impulsion pour un gaz parfait. Donnez l'expression de u_i pour le fluide au repos.
10. Donnez les composantes (tt) , (rr) , $(\theta\theta)$ et $(\varphi\varphi)$ de $T_{\mu\nu}$ ainsi que T^λ_λ .
11. Donnez les composantes (tt) , (rr) et $(\theta\theta)$ des équations d'Einstein.
12. En suivant une stratégie similaire au cas sans source, déterminez alors la fonction A , puis la fonction B , à l'aide des équations d'Einstein pour $r > R$. (On appellera $M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_E(r) dr$ et on pourra fixer les constantes d'intégration à $K_1 = 0$ et $K_2 = 1$.)
13. Donnez la forme complète de la métrique de Schwarzschild avec constante cosmologique.

Remarque

Une métrique statique et à symétrie sphérique prend la forme suivante :

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

7.3 Propagation d'une onde autour d'un trou noir

On s'intéressera dans cette exercice à la propagation d'une onde dans la métrique de Schwarzschild. La mécanique ondulatoire est essentielle pour formuler le comportement *quantique* d'une particule autour d'un trou noir et ainsi comprendre de façon quantitative la dynamique d'évaporation d'un trou noir. On cherchera ici à montrer comment un potentiel gravitationnel effectif apparaît dans la dynamique d'une onde. Le comportement de cette onde peut servir pour décrire la dynamique de particules scalaires.

1. Donnez les expressions de $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ et $-g$ pour la métrique de Schwarzschild.

2. En appelant $h(r) = (1 - 2GM/r)$, donnez l'expression de la coordonnée y définie par $dy = \frac{dr}{h(r)}$. (On utilisera le fait que $(1 - 2GM/r)^{-1} = 1 + \frac{2GM}{r-2GM}$ et on fixera la constante d'intégration égale à 0.)
3. Donnez les valeurs prises par y pour r compris entre $2GM$ et l'infini. La coordonnée y est-elle suffisante pour décrire l'ensemble du trou noir ? Est-elle suffisante pour décrire l'extérieur du trou noir ?
4. Pour le cas d'une particule sans masse, $m = 0$, donnez l'équation d'onde dans la métrique de Schwarzschild. (On pourra garder $h(r)$ pour alléger les équations.)

Nous nous limiterons dans la suite à l'étude des ondes stationnaires :

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = f(r, \theta, \varphi) \times \exp(-i\omega t)$$

avec ω un nombre réel.

5. Commençons par les ondes sphériques (appelées aussi *ondes s*), c'est-à-dire indépendantes des coordonnées angulaires : $f_s(r, \theta, \varphi) = f_s(r)$.
 - (a) Donnez l'équation des ondes s en fonction des dérivées par rapport à r et en fonction de ω .
 - (b) En utilisant la coordonnée y , montrez que la fonction $U_s(y) = r \times f_s(r)$ est solution d'une équation de Schrödinger stationnaire. Quel est l'analogue de l'énergie et du potentiel ? (Le potentiel apparaîtra plus simplement comme une fonction de r .)
 - (c) À quelle interaction correspond ce potentiel ? Montrez qu'entre l'horizon du trou noir et un observateur à l'infini, ce potentiel correspond à une barrière de potentiel. (On s'intéressera pour cela au comportement asymptotique, *i.e.* pour $r \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 2GM$, et à l'extremum du potentiel.)
 - (d) Que se passe-t-il si un observateur situé à proximité de l'horizon du trou noir, mais « en dehors » de celui-ci, envoie une onde vers un observateur situé en $r = +\infty$. (On discutera en particulier l'effet de la valeur de ω .)
6. Considérons maintenant la dépendance angulaire de ces ondes. À l'aide de la méthode de séparation des variables, on peut montrer que la partie angulaire de la fonction d'onde est donnée par les harmoniques sphériques, notées Y_m^ℓ : $f(r, \theta, \varphi) = f_\ell(r) \times Y_m^\ell(\theta, \varphi)$.
 - (a) Montrez que la fonction $U_\ell(y) = r \times f_\ell(r)$ est toujours solution d'une équation de Schrödinger.
 - (b) Quel est maintenant le terme de type potentiel, noté $V_\ell(r)$?
 - (c) Quelle est l'interprétation du terme fonction de $\ell(\ell + 1)$ qui intervient dans $V_\ell(r)$?

7. Pour finir, considérons de nouveau une onde s mais qui décrira cette fois-ci une particule « massive ».
- Montrez que le potentiel est donné par $V(r) = h(r) \left(\frac{1}{r} \frac{dh}{dr} + m^2 \right)$. Quel est son comportement asymptotique ?
 - On peut montrer que dans une certaine gamme de masse, le potentiel présente d'abord une barrière en r_1 , puis un puits de potentiel en $r_2 > r_1$, tels que $V_{\text{barrière}} > m^2 > V_{\text{puits}}$. Donnez une conséquence possible de la présence d'un puits dans ce nouveau potentiel.
8. En quoi l'ensemble de ces résultats se rapproche-t-il de la classification des orbites classiques autour d'un trou noir ?

Remarque

L'équation d'onde en espace courbe est (cf. exercice 1 du chapitre 4)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} + m^2 \Phi = 0,$$

avec m la masse de la particule décrite par l'onde. L'équation de Schrödinger pour un système stationnaire d'énergie E et soumis à un potentiel $V(x)$, est

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + [E - V(x)] \Psi(x) = 0.$$

Les harmoniques sphériques, usuellement notées Y_m^ℓ , sont les fonctions propres de l'opérateur laplacien sur la sphère (ℓ est un entier positif et $-\ell < m < \ell$). Elles sont solutions de l'équation suivante :

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_m^\ell(\theta, \varphi) + \ell(\ell + 1) Y_m^\ell(\theta, \varphi) = 0.$$

Corrigés

7.1

- Le tenseur métrique est diagonal. On trouve alors $g_{tt} = B$, $g_{rr} = -A$, $g_{\theta\theta} = -r^2$, $g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \theta$ et $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$. Pour un tenseur métrique diagonal, nous avons son inverse $g^{\mu\nu}$ qui est aussi diagonal avec $g^{\mu\mu} = \frac{1}{g_{\mu\mu}}$. On trouve enfin $-g = A(r)B(r) \times r^4 \sin^2 \theta$.
- Nous donnons ici la dérivation de chacune des composantes demandées. Nous avons pour une métrique diagonale (ci-dessous, il n'y a pas de sommation sur les indices) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \left[\frac{g_{\mu\mu,\nu}}{g_{\mu\mu}} \times \delta_\mu^\lambda + \frac{g_{\nu\nu,\mu}}{g_{\nu\nu}} \times \delta_\nu^\lambda - \frac{g_{\mu\mu,\lambda}}{g_{\lambda\lambda}} \times \delta_\nu^\mu \right].$$

On utilisera de plus le fait que $g_{\mu\nu}$ ne dépend que des coordonnées r et θ . On trouve alors

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \left[\frac{g_{rr,r}}{g_{rr}} \times \delta_r^r + \frac{g_{rr,r}}{g_{rr}} \times \delta_r^r - \frac{g_{rr,r}}{g_{rr}} \times \delta_r^r \right] = \frac{1}{2} \times \frac{g_{rr,r}}{g_{rr}} = \frac{A'}{2A}.$$

De même

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \left[\frac{g_{tt,t}}{g_{tt}} \times \delta_t^r + \frac{g_{tt,t}}{g_{tt}} \times \delta_t^r - \frac{g_{tt,r}}{g_{rr}} \times \delta_t^t \right] = -\frac{1}{2} \times \frac{g_{tt,r}}{g_{rr}} = \frac{B'}{2A},$$

et

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{g_{rr,\theta}}{g_{rr}} \times \delta_r^\theta + \frac{g_{\theta\theta,r}}{g_{\theta\theta}} \times \delta_\theta^\theta - \frac{g_{rr,\theta}}{g_{\theta\theta}} \times \delta_\theta^r \right] = \frac{1}{2} \times \frac{g_{\theta\theta,r}}{g_{\theta\theta}} = \frac{1}{r},$$

et enfin

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \left[\frac{g_{tt,r}}{g_{tt}} \times \delta_t^t + \frac{g_{rr,t}}{g_{rr}} \times \delta_r^t - \frac{g_{tt,t}}{g_{tt}} \times \delta_t^r \right] = \frac{1}{2} \times \frac{g_{tt,r}}{g_{tt}} = \frac{B'}{2B}.$$

3. Nous détaillons ici la composante (tt) : $R_{tt} = \Gamma_{tt,\lambda}^\lambda - \Gamma_{t\lambda,t}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{tt}^\rho - \Gamma_{\rho t}^\lambda \Gamma_{t\lambda}^\rho$. Puisque la seule composante non nulle de Γ_{tt}^λ est Γ_{tt}^r et que $\Gamma_{t\lambda}^\lambda = 0$, les deux premiers termes donnent

$$\Gamma_{tt,\lambda}^\lambda - \Gamma_{t\lambda,t}^\lambda = \Gamma_{tt,r}^r = \frac{B''}{2A} - \frac{B'A'}{2A^2}.$$

En utilisant ensuite $\Gamma_{tt}^\rho \neq 0$ si $\rho = r$ et $\Gamma_{\rho t}^\lambda \neq 0$ si $(\lambda, \rho) = (r, t)$ ou $(\lambda, \rho) = (t, r)$, on trouve pour les termes suivants

$$\Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{tt}^\rho = [\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\varphi}^\varphi] \Gamma_{tt}^r,$$

et $\Gamma_{\rho t}^\lambda \Gamma_{t\lambda}^\rho = 2\Gamma_{tt}^r \Gamma_{rt}^t$. Cela donne pour les termes quadratiques en Γ

$$\Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{tt}^\rho - \Gamma_{\rho t}^\lambda \Gamma_{t\lambda}^\rho = \frac{B'}{2A} \left[\frac{A'}{2A} + \frac{2}{r} - \frac{B'}{2B} \right].$$

On trouve finalement pour la composante (tt)

$$R_{tt} = \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rA}.$$

4. Nous détaillons ici la composante (rr) : $R_{rr} = \Gamma_{rr,\lambda}^\lambda - \Gamma_{r\lambda,r}^\lambda + \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{rr}^\rho - \Gamma_{\rho r}^\lambda \Gamma_{r\lambda}^\rho$. Puisque $\Gamma_{rr}^\rho \neq 0$ si $\rho = r$, nous obtenons dans un premier temps

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr,\lambda}^\lambda - \Gamma_{r\lambda,r}^\lambda &= \Gamma_{rr,r}^r - [\Gamma_{rt,r}^t + \Gamma_{rr,r}^r + \Gamma_{r\theta,r}^\theta + \Gamma_{r\varphi,r}^\varphi] \\ &= -\Gamma_{r\theta,r}^\theta - \Gamma_{r\varphi,r}^\varphi - \Gamma_{rt,r}^t \\ &= -\frac{B''}{2B} + \frac{1}{2} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + \frac{2}{r^2}. \end{aligned}$$

Dans un deuxième temps, en utilisant toujours $\Gamma_{rr}^\rho \neq 0$ si $\rho = r$, nous obtenons

$$\Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{rr}^\rho = \Gamma_{r\lambda}^\lambda \Gamma_{rr}^r = \Gamma_{rr}^r \left[\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\varphi}^\varphi \right].$$

Le dernier terme s'écrit quant à lui

$$\Gamma_{\rho r}^\lambda \Gamma_{r\lambda}^\rho = \Gamma_{\rho r}^t \Gamma_{tr}^\rho + \Gamma_{\rho r}^r \Gamma_{rr}^\rho + \Gamma_{\rho r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\rho + \Gamma_{\rho r}^\varphi \Gamma_{\varphi r}^\rho.$$

En utilisant successivement le fait que i) $\Gamma_{\rho r}^t \neq 0$ si $\rho = t$, que ii) $\Gamma_{\rho r}^r \neq 0$ si $\rho = r$, iii) $\Gamma_{\rho r}^\theta \neq 0$ si $\rho = \theta$ et iv) $\Gamma_{\rho r}^\varphi \neq 0$ si $\rho = \varphi$ (de façon condensée $\Gamma_{\rho r}^\lambda \propto \delta_\rho^\lambda$), ce dernier terme est

$$\Gamma_{\rho r}^\lambda \Gamma_{r\lambda}^\rho = \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{\varphi r}^\varphi.$$

La différence des deux derniers termes est donc

$$\Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \Gamma_{rr}^\rho - \Gamma_{\rho r}^\lambda \Gamma_{r\lambda}^\rho = \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rA} + \frac{2}{r^2}. \quad (7.81)$$

En cumulant l'ensemble des résultats, la composante (rr) du tenseur de Ricci est

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rA}.$$

7.2

1. Les équations d'Einstein avec constante cosmologique sont

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

2. La trace des équations d'Einstein s'obtient en contractant ces équations avec le tenseur métrique $g^{\mu\nu}$. En utilisant $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ et $T^\lambda_\lambda = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$, on montre que

$$R = -8\pi G T^\lambda_\lambda - 4\Lambda.$$

En injectant R dans les équations d'Einstein, on trouve

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \right) - g_{\mu\nu} \Lambda.$$

3. Pour un espace-temps statique et à symétrie sphérique, on trouve

$$R_{tt} = \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{r \times A},$$

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{r \times A},$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A},$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta},$$

en utilisant la notation $f' = \frac{df}{dr}$.

4. La deuxième forme des équations d'Einstein donne

$$\text{composante } (tt) : \quad \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{r \times A} = -\Lambda \times B(r),$$

$$\text{composante } (rr) : \quad -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{r \times A} = \Lambda \times A(r),$$

$$\text{composante } (\theta\theta) : \quad 1 - \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} = r^2 \times \Lambda.$$

5. On trouve que

$$\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} + \frac{2R_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{2A'}{rA^2} - \frac{2}{r^2A} + \frac{2}{r^2}.$$

En dérivant r/A par rapport à r , on montre alors que

$$\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} + \frac{2R_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{2}{r^2} \left[1 - \left(\frac{r}{A} \right)' \right].$$

En utilisant le membre de droite des équations d'Einstein, on trouve de plus que

$$\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} + \frac{2R_{\theta\theta}}{r^2} = 2\Lambda.$$

On doit alors résoudre l'équation $f' = 1 - r^2\Lambda$ avec $f = r/A$. La solution générique est $f = K_1 + r - \frac{1}{3}r^3\Lambda$. On trouve finalement

$$A(r) = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{r} - \frac{4}{3}r^2}.$$

6. De par l'expression des composantes du tenseur de Ricci, on trouve

$$\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} = \frac{1}{r \times A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right).$$

Par ailleurs, les équations d'Einstein donnent

$$\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} = -\frac{\Lambda \times B}{B} + \frac{\Lambda \times A}{A} = 0.$$

On trouve donc $0 = \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = [\ln(A \times B)]'$. La dérivée du logarithme de $A \times B$ est nulle si $A \times B = K_2$, avec K_2 une constante.

7. En l'absence de source, on doit vérifier l'égalité $R = -4\Lambda$. On a tout d'abord

$$R = \frac{R_{tt}}{B} - \frac{R_{rr}}{A} - \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} - \frac{R_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

En utilisant $A = K_2/B$, $R_{tt} = -B \times R_{rr}/A$ et $R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$, on obtient $R = -\frac{2B}{K_2} R_{rr} - \frac{2R_{\theta\theta}}{r^2}$. En utilisant $B' = -K_1 K_2 / r^2 - 2K_1 \Lambda r / 3$ et $B'' = 2K_1 K_2 / r^3 - 2K_2 \Lambda / 3$, on trouve

$$2B \times R_{rr} / K_2 = -(B'' + 2r^{-1} B') / K_2 = 2\Lambda$$

et $2r^{-2} R_{\theta\theta} = 2\Lambda$. On trouve bien que $R = -4\Lambda$.

8. Un espace-temps *strictement* vide avec $\Lambda = 0$ est l'espace-temps de Minkowski. Dans la limite $\Lambda = 0$, on doit avoir $A(r) = B(r) = 1$. On trouve alors $K_1 = 0$ et $K_2 = 1$.

9. Le tenseur énergie-impulsion est $T_{\mu\nu} = (\rho_E + p) u_\nu u_\mu - p g_{\mu\nu}$. Pour un fluide au repos, $u_r = u_\theta = u_\varphi = 0$. Ainsi, $u_\mu = (u_t, 0, 0, 0)$. En utilisant la norme de la quadrivitesse, i.e. $g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 1$, on trouve $u_t = \sqrt{B(r)}$.

10. Puisque $p = 0$ et uniquement u_t est non nulle, on trouve $T_{\mu i} = 0$ pour $\mu = 0, \dots, 4$ et $i = 1, \dots, 3$ et $T_{00} = \rho \times B(r)$. On en déduit $T^\lambda_\lambda = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \rho$.

11. La deuxième forme des équations d'Einstein donne

$$\text{comp. (tt)} : \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{r \times A} = 4\pi G \rho B(r) - \Lambda \times B(r),$$

$$\text{comp. (rr)} : -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{r \times A} = 4\pi G \rho A(r) + \Lambda \times A(r),$$

$$\text{comp. (\theta\theta)} : 1 - \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} = 4\pi G r^2 \rho + r^2 \times \Lambda.$$

12. Pour trouver A , on montre tout d'abord que

$$\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} + \frac{2R_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{2}{r^2} \left[1 - \left(\frac{r}{A} \right)' \right] = 2\Lambda + 16\pi G \rho_E(r).$$

En posant $f = r/A$, on trouve donc

$$f = r - \frac{\Lambda}{3} r^3 - 2G \int_0^{r>R} 4\pi r'^2 \rho_E(r') dr',$$

avec une constante d'intégration $K_1 = f(0) = 0$. Puisque pour $r > R$, $\rho_E(r > R) = 0$, l'intégrale ci-dessus est égale à M . On a alors

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right]^{-1}.$$

Pour trouver B , on montre alors que $\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} = \frac{[\ln(A \times B)]'}{r \times A} = 8\pi G \rho_E(r)$. Comme pour $r > R$, on a $\rho_E = 0$, on trouve de nouveau que, pour $r > R$: $A \times B = \text{constante}$. On pourra fixer cette constante à 1 et ainsi obtenir

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2.$$

13. La métrique finale est

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

7.3

1. On trouve

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - 2GM/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - 2GM/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

et

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 - 2GM/r)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - 2GM/r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la métrique est $g = -r^4 \sin^2 \theta$.

2. En intégrant $\frac{dr}{h(r)}$, on obtient

$$y(r) = r + 2GM \times \ln(r - 2GM) + \text{cste}.$$

La constante d'intégration peut être prise égale à zéro.

3. Pour $r \rightarrow \infty$, on trouve $y \rightarrow \infty$ et pour $r \rightarrow 2GM$ on trouve $y \rightarrow -\infty$. La coordonnée y (parfois appelée coordonnée *tortue* en rapport à la tortue de Zénon) est, en tant que fonction de r , une bijection de $[2GM, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$. Avec y , l'horizon est « repoussé » en $-\infty$: cette coordonnée ne peut pas décrire l'ensemble de l'espace-temps de Schwarzschild mais elle est suffisante pour décrire l'extérieur du trou noir, i.e. $r > 2GM$.

4. Dans la métrique de Schwarzschild, l'équation d'onde est

$$\frac{r^2}{h(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 h(r) \frac{\partial}{\partial r} \Phi(t, r, \theta, \varphi) \right) + \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Phi(t, r, \theta, \varphi).$$

5. (a) Puisque $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -\omega^2 \Phi$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$, on trouve l'équation

$$\frac{h(r)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 h(r) \frac{\partial f_s(r)}{\partial r} \right) = -\omega^2 f_s(r).$$

(b) L'équation différentielle dont U_s est solution est bien une équation de Schrödinger :

$$\frac{d^2 U_s}{dy^2} + \left(\omega^2 - \frac{h(r)}{r} \frac{dh}{dr} \right) U_s = 0.$$

L'analogie de l'énergie est ici $\omega^2 \equiv E$ tandis que le terme de type potentiel est $V(r) \equiv \frac{h(r)}{r} \frac{dh}{dr}$. Le fait que les quantités apparaissent au carré n'est pas anodin puisque l'équation différentielle ci-dessus trace la relation de dispersion relativiste énoncée précédemment : $E^2 = P^2 + V^2(r)$, l'impulsion étant remplacée par l'opérateur $(-i \frac{d}{dr})$.

(c) Ce terme de potentiel décrit le potentiel gravitationnel à l'extérieur du trou noir. En fonction de r , il s'écrit

$$V(r) = \frac{2GM}{r^3} \left(1 - \frac{2GM}{r} \right).$$

On notera tout d'abord que ce potentiel s'annule en $r \rightarrow \infty$ mais aussi au niveau de l'horizon du trou noir, en $r = 2GM$. En calculant la dérivée du potentiel, on montre facilement que ce potentiel possède un unique extremum en $r_{\max} = 8GM/3$ et que cet extremum est un maximum $V_{\max} = 27/(32GM)^2$. Ce potentiel est donc une *barrière* de potentiel.

(d) Il s'agit ici d'un simple effet tunnel qui apparaît en mécanique ondulatoire. Une partie de l'onde émise en $r = 2GM + \epsilon$ traverse la barrière de potentiel pour être finalement transmise à l'observateur infiniment loin. Toutefois, une autre partie de l'onde est réfléchiée par la barrière de potentiel pour finalement tomber dans le trou noir. La transmission sera d'autant plus efficace que ω^2 est grand, conférant à l'onde une « énergie » de plus en plus supérieure à la barrière de potentiel.

6. (a) En considérant la dépendance angulaire, on obtient l'équation de Schrödinger suivante

$$\frac{d^2 U_s}{dy^2} + \left[\omega^2 - \frac{h(r)}{r} \left(\frac{dh}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r} \right) \right] U_s = 0.$$

(b) Le terme potentiel est $V_\ell(r) = \frac{h(r)}{r} \left(\frac{dh}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r} \right)$.

(c) Par analogie avec le mouvement d'une particule, la dépendance angulaire trace la présence d'un moment angulaire. Ce terme potentiel est donc l'équivalent du potentiel centrifuge.

7. (a) Pour trouver le potentiel, il faut tout d'abord réécrire l'équation d'onde « massive » dans la métrique de Schwarzschild puis utiliser de nouveau le fait que pour une onde s stationnaire : $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Phi$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$. On a alors :

$$\frac{h(r)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 h(r) \frac{\partial f_s(r)}{\partial r} \right) - h(r) m^2 f_s(r) = -\omega^2 f_s(r).$$

En introduisant la coordonnée y et la fonction $U = r \times f_s$, on obtient de nouveau une équation de Schrödinger avec $V(r) = h(r) \left(\frac{1}{r} \frac{dh}{dr} + m^2 \right)$. On a $V(r \rightarrow 2GM) = 0$ à l'horizon du trou noir et $V(r \rightarrow \infty) = m^2$.

(b) Puisqu'il y a un puits de potentiel, il y aura des états liés qui correspondent à des particules massives et quantiques en orbite autour d'un trou noir.

8. Il a ici été montré que le potentiel d'une particule quantique évoluant dans la métrique de Schwarzschild ne présente un puits de potentiel que si la particule est massive. Ainsi, on retrouve à un niveau quantique le résultat classique du fait qu'une particule (scalaire) sans masse ne peut être en orbite stable autour d'un trou noir alors qu'une particule (scalaire) massive le peut.

VERS LA GRAVITATION QUANTIQUE : LA VOIE DES CORDES

8

INTRODUCTION

Ce chapitre entend offrir une introduction qualitative à la théorie des cordes. Nous insistons sur les idées et les concepts qui sous-tendent l'approche. Quelques rudiments de formalisme sont également donnés comme un avant-goût de la manière dont la théorie s'écrit. Les incomplétudes et réussites sont finalement esquissées comme autant de pistes de réflexion.

8.1 IDÉES FONDAMENTALES

Le désir d'unification est un guide précieux. Il s'est incontestablement avéré fructueux en physique. L'unification des forces électriques et magnétiques est un grand succès conceptuel. Le modèle de Glashow-Salam-Weinberg unifiant la force électromagnétique et la force nucléaire faible en est un autre. Toute la physique des particules s'est construite et déployée autour de la quête d'unification. Le principe de jauge consiste à identifier les symétries et à les rendre locales *via* l'introduction de médiateurs des interactions. L'actuel modèle standard inclut 6 quarks (présentant chacun 3 couleurs), 6 leptons et 12 bosons médiateurs. Bien qu'il comporte un certain nombre de paramètres libres, le modèle standard est un remarquable succès. La théorie des cordes est une héritière de cette démarche.

Il est en effet probable que le modèle standard ne soit qu'une étape dans la recherche d'une théorie plus fondamentale. En particulier, l'unification de la force « électrofaible » avec la force nucléaire forte n'est pas achevée. Par ailleurs, il est possible qu'une version plus complète du modèle standard inclue la supersymétrie. Cette nouvelle (et hypothétique) symétrie lierait les bosons et les fermions. Outre quelques intérêts majeurs, présentés au chapitre 6, comme la stabilisation de la masse du boson de Higgs, la convergence des constantes de couplage et la production d'un excellent candidat pour la matière noire, la supersymétrie créerait un lien sans précédent entre

les forces et les particules. Et, au-delà, il est évidemment espéré que la gravitation puisse entrer dans le modèle standard.

La théorie des cordes est un bon candidat – peut-être le seul – en tant que théorie unifiant toutes les forces connues de la nature. En théorie des cordes, *toutes* les forces sont effectivement unifiées de manière élégante et fondamentale. Plus encore : toutes les particules sont unifiées. Elles le sont parce que les particules connues sont ré-interprétées comme différents modes de vibration d'une unique classe de cordes élémentaires. De la même manière qu'en posant ses mains en différents lieux du manche, on peut générer toutes les notes de la gamme chromatique avec une corde de violon, on peut ici donner lieu à toutes les particules à partir de différentes vibrations des cordes. Un processus du type $a \rightarrow b + c$ où une particule a se désintègre en une particule b et une particule c doit être comprise comme une corde vibrante qui se casse en deux cordes vibrant différemment.

La théorie des cordes est une théorie quantique par construction. Ce qui est remarquable est qu'elle soit aussi une théorie gravitationnelle ! La gravitation y est « automatiquement » présente. Une autre propriété intéressante associée à cette démarche vient de ce qu'il n'y a pas de paramètre ajustable sans dimension en théorie des cordes (il y en a plus de 20 dans le modèle standard). Au moins suivant une certaine vision de la théorie¹ ... La théorie des cordes fait apparaître un (presque) unique paramètre dimensionné : la longueur des cordes l_s . Par ailleurs, il se trouve que la théorie des cordes prédit également le nombre de dimensions de l'espace-temps, ce qui est pour le moins inhabituel.

Il existe, dans cette théorie, des cordes ouvertes et des cordes fermées. S'il est possible d'envisager un monde ne contenant que des cordes fermées, il n'en va pas de même d'un monde ne contenant que des cordes ouvertes, simplement car ces dernières peuvent toujours se fermer. Par ailleurs, il existe des théories de cordes bosoniques, vivant dans un espace-temps à 26 dimensions, et des théories de supercordes vivant dans un espace-temps à 10 dimensions. Étant donné que les premières ne peuvent pas décrire les fermions, seules les secondes sont aujourd'hui considérées comme des candidats crédibles. La supersymétrie y joue un rôle majeur.

Si la théorie des supercordes est correcte, il doit donc exister 6 dimensions supplémentaires qui sont nécessairement « compactifiées » pour avoir échappé à toute détection jusqu'à aujourd'hui. Il est vraisemblable que le rayon de compactification soit de l'ordre de l'échelle de Planck, soit $L_{\text{Pl}} \sim 10^{-33}$ cm. Ce qui se trouve à quelque 17 ordres de grandeur en deçà des tailles (c'est à dire *au-delà* des énergies) actuellement sondées par les accélérateurs de particules. Il n'est néanmoins pas impossible que ces dimensions supplémentaires soient plus grandes et éventuellement

1. Étant encore en plein développement, la théorie des cordes n'est pas fondée sur une axiomatique claire.

décelables. Bien qu'une éventuelle découverte ne constitue en aucun cas une preuve formelle de la théorie des cordes, il est indéniable que la mise en évidence de la supersymétrie ou de dimensions supplémentaires constituerait un élément important en faveur de cette approche. À l'heure actuelle, il n'existe aucune indication expérimentale claire en faveur de la théorie des cordes. Avec un brin de provocation, certains considèrent qu'il est inexact de considérer que la théorie des cordes est en difficulté pour produire des prédictions : elle prédit la gravité ! Il est remarquable qu'aucune des vibrations des cordes classiques ne « contienne » la gravitation mais que celle-ci apparaisse inexorablement lors de la quantification des cordes. Le spectre des cordes fermées contient un graviton.

Au-delà du fait qu'il est clairement possible de rendre compte de toutes les particules grâce à la théorie des cordes, la question se pose de l'émergence précise du modèle standard dans la limite basse énergie. Celle-ci n'a pas encore été établie précisément. Certains modèles utilisant des D -branes² conduisent à un contenu en particules qui est exactement celui du modèle standard, mais avec des masses nulles.

8.2 UNE PREMIÈRE ÉBAUCHE D'INTRODUCTION

Ce paragraphe entend aller un tout petit peu au-delà des arguments très qualitatifs du paragraphe précédent pour donner quelques rudiments *très* élémentaires de théorie des cordes. Même simplifié à l'extrême, le formalisme n'est pas simple. Le lecteur désireux d'en rester aux concepts et idées peut passer ce paragraphe. Il ne vise, de toute façon, pas à une présentation systématique mais constitue juste une « invitation » dans l'espoir que l'étudiant intéressé tente de lire des ouvrages spécialisés. Il n'est pas ici question de comprendre toutes les lignes du calcul, mais juste de découvrir un « avant-goût » du langage cordiste.

Pour se plier aux conventions usuelles du domaine, nous considérons un fond riemannien fixe $\mathcal{M}$ de dimension D , avec des coordonnées $X = (X^\mu)$, $\mu = 0, \dots, D-1$. La métrique D -dimensionnelle est $G_{\mu\nu}(X)$. Le mouvement d'une corde relativiste dans $\mathcal{M}$ est décrit par ce qui généralise immédiatement la ligne d'univers, à savoir la « surface d'univers » (feuille de monde) Σ , qui représente l'ensemble des points par lesquels est passée la corde. Pour une corde unique fermée, la surface d'univers serait un tube. On peut introduire des coordonnées sur la surface $\sigma = (\sigma^0, \sigma^1)$. Elles sont au nombre de deux puisque c'est un objet bidimensionnel. La coordonnée σ^0 est de type temps (par exemple le temps propre associé au centre de masse de la corde) et donc à valeur dans $\mathbb{R} : \sigma^0 \in]-\infty, +\infty[$. La coordonnée σ^1 est, elle, de type espace et

2. Les D -branes sont en théorie des cordes des objets étendus sur lesquels les cordes ouvertes se terminent avec des conditions aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire de positions fixées. Nous y revenons dans le paragraphe suivant.

spécifie l'extension spatiale unidimensionnelle d'une corde. Puisque les cordes sont de taille finie, σ^1 sera à valeur dans un intervalle fini : $\sigma^1 \in]\sigma_{\min}^1, \sigma_{\max}^1[$. Dans la suite, nous supposons un choix de σ^1 tel que cette coordonnée soit à valeur dans $]0, \pi[$. L'immersion de la surface dans l'espace-temps est représentée par une carte

$$X : \Sigma \longrightarrow \mathcal{M} : \sigma \longrightarrow X(\sigma) . \quad (8.1)$$

La métrique de fond induit une métrique sur la surface :

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} G_{\mu\nu} , \quad (8.2)$$

où $\alpha, \beta = 0, 1$ sont des indices surfaciques. Il est important de ne pas confondre cette métrique induite avec la métrique intrinsèque $h_{\alpha\beta}$ sur Σ .

Il est intéressant de mentionner que les choses peuvent être vues de deux façons correctes et pourtant intuitivement très différentes. On peut simplement penser le mouvement d'une corde relativiste dans un espace-temps donné $\mathcal{M}$. Mais on peut aussi voir cela comme une théorie des champs à deux dimensions vivant sur la surface, dont les champs X sont à valeurs dans l'espace-temps image $\mathcal{M}$. Cette dernière description est nécessaire pour utiliser le vocabulaire et les outils de la théorie des champs bidimensionnelle.

De la même façon que l'action relativiste de la particule libre est donnée par la longueur de la trajectoire, l'action la plus naturelle est ici l'aire. On la mesure avec la métrique induite, ce qui s'écrit :

$$S_{NG} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma |\det G_{\alpha\beta}|^{1/2} . \quad (8.3)$$

Les raisons de l'apparition du déterminant sont exactement les mêmes que celles données au chapitre 4 quant à l'existence du $\sqrt{-g}$. La formule (8.3) est l'action de Nambu-Goto qui joue un rôle important en théorie des cordes. Elle n'est que la généralisation immédiate de l'action d'une particule massive en relativité restreinte (cf. exercice 2.3). Le facteur $1/(2\pi\alpha')$ représente l'énergie par unité de longueur – ou tension – de la corde. Il est le paramètre fondamental de la théorie. Dans cette manière d'écrire les choses, α' se nomme la pente de Regge et a la dimension d'une longueur au carré.

L'action (8.3) est simple à comprendre au niveau géométrique mais la présence d'une racine carrée rend son utilisation effective délicate. Pour cette raison, on lui préfère souvent l'action de Polyakov qui lui est équivalente mais dérive de la vision « théorie de champs à deux dimensions ». Elle s'écrit en fonction de la métrique intrinsèque sur la surface $h_{\alpha\beta}(\sigma)$:

$$S_P = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} G_{\mu\nu}(X) , \quad (8.4)$$

avec $h = |\det h_{\alpha\beta}|$. La démonstration de cette écriture fait appel à la technique des champs auxiliaires et ne présente pas d'intérêt particulier. En introduisant un tenseur énergie-impulsion approprié (proportionnel à la dérivée de l'action de Polyakov par rapport à la métrique), on peut interpréter les équations du mouvement de $h_{\alpha\beta}$ comme les équations d'Einstein à deux dimensions. Mais l'action d'Einstein-Hilbert est un invariant topologique³ en dimension 2. Sa variation est donc nulle et les équations d'Einstein associées conduisent à un tenseur énergie-impulsion nul. Comme ce tenseur est par ailleurs sans trace (on peut le montrer avant même d'écrire les équations du mouvement), il n'a que deux composantes indépendantes (qui, comme on vient de le dire, s'annulent quand on suit les équations du mouvement). Étant donné que la théorie des champs nous apprend que la trace du tenseur énergie-impulsion est le courant de Noether⁴ associé aux changements d'échelle, on en déduit que la théorie bidimensionnelle considérée est invariante d'échelle.

L'action de Polyakov (8.4) présente trois symétries locales. Deux sont déjà visibles dans l'action de Nambu-Goto (8.3), ce sont les reparamétrisations de la surface d'Univers :

$$\sigma^\alpha \longrightarrow \tilde{\sigma}^\alpha = f(\sigma^0, \sigma^1) . \quad (8.5)$$

La troisième est la multiplication de la métrique $h_{\alpha\beta}$ par un scalaire local positif,

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) \longrightarrow e^{\Lambda(\sigma)} h_{\alpha\beta}(\sigma) . \quad (8.6)$$

Grâce à ces trois symétries, on peut procéder à ce que l'on nomme un choix de jauge et conférer à la métrique $h_{\alpha\beta}$ une forme souhaitée. Le choix standard est la jauge conforme :

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) = \eta_{\alpha\beta} , \quad (8.7)$$

avec $\eta_{\alpha\beta}$ la métrique de Minkowski à deux dimensions.

On introduit généralement les coordonnées dites de « cône de lumière » définies par :

$$\sigma^\pm = \sigma^0 \pm \sigma^1 . \quad (8.8)$$

Si l'on se restreint pour une première étude à un espace plat ($G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), on peut montrer que l'équation du mouvement dans la jauge conforme se réduit à :

$$\partial^\alpha \partial_\alpha X^\mu = 0 . \quad (8.9)$$

3. Un invariant topologique reste inchangé par homéomorphisme, c'est-à-dire par isomorphisme entre espaces topologiques.

4. C'est-à-dire, comme nous l'avons expliqué dans les premiers chapitres, la quantité conservée associée à une symétrie continue.

La solution générale de cette équation est une superposition d'ondes se déplaçant vers la droite et vers la gauche,

$$X^\mu(\sigma) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-) . \quad (8.10)$$

Reste à fixer des conditions aux limites. Ces dernières jouent un rôle très important en théorie des cordes. Si on s'intéresse à des cordes fermées, on peut fixer des conditions aux limites périodiques :

$$X^\mu(\sigma^0, \sigma^1 + \pi) = X^\mu(\sigma^0, \sigma^1) . \quad (8.11)$$

On paramétrise généralement cette solution sous la forme

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \sigma^0 + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-2in\sigma^+} + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-2in\sigma^-} , \quad (8.12)$$

où x^μ est la position du centre de masse de la corde au temps σ^0 et p^μ est l'impulsion totale. Le centre de masse se meut ainsi en ligne droite dans un espace de Minkowski, comme une particule libre relativiste. Les degrés de liberté additionnels sont des ondes gauche et droite sur la corde. Les constantes α_m^μ et $\tilde{\alpha}_m^\mu$ sont simplement les coefficients de Fourier.

Si l'on s'intéresse à des cordes ouvertes, on ne peut plus recourir aux conditions aux limites périodiques. Un choix simple possible consiste à supposer que les dérivées s'annulent aux limites. C'est ce qu'on nomme les conditions de Neumann, qui correspondent intuitivement à ce qu'on obtiendrait avec une corde terminée par des petits arceaux qui pourraient glisser sur des tiges métalliques verticales :

$$\partial_1 X^\mu \Big|_{\sigma^1=0} = 0 , \quad \partial_1 X^\mu \Big|_{\sigma^1=\pi} = 0 . \quad (8.13)$$

Dans ce cas, l'impulsion est conservée aux extrémités de la corde et les ondes sont réfléchies, donnant lieu à des ondes stationnaires. La solution s'écrit alors

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + (2\alpha') p^\mu \sigma^0 + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^0} \cos(n\sigma^1) . \quad (8.14)$$

D'autres conditions aux limites sont néanmoins possibles : plutôt que fixer les dérivées, ce sont les limites de la corde qui sont maintenues fixes. C'est ce qu'on nomme les conditions de Dirichlet :

$$X^\mu \Big|_{\sigma^1=0} = x_{(1)}^\mu , \quad X^\mu \Big|_{\sigma^1=\pi} = x_{(2)}^\mu . \quad (8.15)$$

Les solutions s'écrivent alors :

$$X^\mu(\sigma) = x_{(1)}^\mu + (x_{(2)}^\mu - x_{(1)}^\mu) \frac{\sigma^1}{\pi} + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^0} \sin(n\sigma^1) . \quad (8.16)$$

Plus généralement, on peut imposer des conditions de Neumann dans $p + 1$ directions – disons $(X^m) = (X^0, X^1, \dots, X^p)$ – et des conditions de Dirichlet dans les autres directions – disons $(X^a) = (X^{p+1}, \dots, X^{D-1})$. Le choix de conditions de Dirichlet le plus simple consiste alors à supposer que toutes les cordes ouvertes commencent et finissent sur un plan de dimension p (la première des $p + 1$ dimensions est le temps) situé à une position arbitraire $X^a = x_{(1)}^a$. Un tel plan est nommé D -brane. Bien que les extrémités des cordes soient attachées au D -brane, elles peuvent toujours se mouvoir librement dans les directions de Neumann. On peut évidemment généraliser cela à un nombre arbitraire N de D -branes situées en $x_{(i)}^a$ suivant les directions de Dirichlet.

Il est intéressant de noter que l'impulsion n'est pas conservée aux extrémités de la corde avec des conditions de Dirichlet. Pour cette raison, les D -branes *doivent* être considérées comme des êtres physiques à part entière et différents des cordes elles-mêmes. En réalité, pour d'autres raisons, la théorie des cordes contient de toutes façons des objets de ce type ! Les D -branes peuvent interagir par échange de cordes mais il existe également, dans les théories de supercordes, des solutions statiques où ils n'exercent aucune force les uns sur les autres.

L'approche que nous venons de décrire brièvement est purement classique. Reste à quantifier les cordes. Il existe plusieurs approches. Dans la quantification covariante, la première étape consiste à imposer des relations de commutation canoniques à $X^\mu(\sigma)$ et à son impulsion conjuguée $\Pi^\mu(\sigma) = \partial_0 X^\mu(\sigma)$. Il faut ensuite imposer des conditions de réalité pour la théorie classique qui se traduisent par des relations d'hermiticité sur x^μ , p^μ et α_m^ν .

Il faut alors procéder à la construction d'un espace de Fock qui représente les relations de commutation du type

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}. \quad (8.17)$$

L'espace de Fock (construit à partir des états propres d'impulsion annihilés par la moitié des oscillateurs et utilisés ensuite pour définir une base à partir des opérateurs de création) n'est néanmoins pas l'espace des états physiques car il faut encore imposer des contraintes. Ces contraintes viennent de ce que les moments canoniques du système ne sont pas indépendants. C'est, au cours de ce processus, lors de l'application des contraintes sur des *opérateurs*, que certaines restrictions apparaissent, en particulier sur la dimensionnalité de l'espace-temps. Au-delà d'un nombre de dimensions critique ($D = 26$ car on s'intéresse ici implicitement à des cordes bosoniques), l'espace des états physiques contient toujours des modes de norme négative et aucun espace de Hilbert ne peut être construit. En deçà de ce nombre critique, on rencontre des pôles non physiques dans les amplitudes de diffusion. La théorie impose donc le nombre de dimensions à $D = 26$ (ou $D = 10$ pour les supercordes) ! Bien qu'il soit (hautement) regrettable qu'elle ne prédise pas $D = 4$, le fait qu'une prédiction quant

à la dimensionnalité de l'espace-temps soit possible est un beau résultat de la théorie des cordes.

Sans être trop détaillées, ces quelques lignes souhaitaient donner un aperçu de la manière dont la théorie des cordes se formule dans ses premiers rudiments.

8.3 HISTOIRE, INCERTITUDES ET CONSÉQUENCES

L'histoire de la théorie des cordes est hautement « non linéaire », pleine de rebondissements, d'espoirs et de déceptions. Nous sommes toujours au cœur de cette histoire et il est bien difficile d'en prédire l'issue. Peut-être d'ailleurs est-ce une caractéristique de l'histoire que de ne jamais s'achever. N'en déplaise à Hegel.

L'approche remonte à une formule proposée par Veneziano pour répondre à une question spécifique portant sur les interactions fortes. Il apparut rapidement que la théorie nécessitait 26 dimensions, qu'il existait des tachyons⁵ (non observés) et de nombreuses particules de masse nulle (non observées). Comme nous l'avons mentionné, la supersymétrie permet de résoudre l'essentiel de ces problèmes⁶. Peu après, il fut alors découvert que les cordes possédaient des états de vibration correspondant aux bosons de jauge connus mais aussi aux gravitons. L'unification est donc impressionnante : unification de toutes les particules, unification des particules et des forces, apparition naturelle des bosons de jauge et, dans une certaine mesure, lien entre le mouvement et les forces (puisque les forces proviennent fondamentalement des ruptures et unions de cordes lors des déplacements).

Au niveau technique, la découverte qui a joué un rôle majeur dans l'engouement pour la théorie des cordes est certainement la démonstration par Green et Schwarz de l'absence (au moins suivant un certain mécanisme) d'anomalie en théorie des cordes. C'est vraisemblablement ce qui incita Witten à travailler sur le sujet et à y contribuer de façon décisive jusqu'à la construction d'une théorie-M qui subsumerait les différentes formes de théories de cordes.

La théorie des cordes s'est déployée autour de trois révolutions. La première est sans conteste la supersymétrie. La deuxième a trait aux relations de dualités. Il a été en effet montré qu'il existe des liens entre les grandes et les petites échelles d'une part (dualité T) et entre les forts et les faibles couplages d'autre part (dualité S). Ces découvertes sont non seulement majeures au niveau théorique mais aussi très utiles au niveau pratique car elles permettent de mener les calculs dans un certain domaine de l'espace des paramètres de la théorie et de les utiliser dans un autre. Enfin, la troisième révolution est celle du *paysage*. Par paysage, on entend le fait que

5. Les tachyons correspondent à des particules se propageant plus rapidement que la lumière.

6. À l'exception notable de la dimensionnalité de l'espace-temps : passer de 26 à 10 dimensions ne change pas grande chose au problème !

la compactification des dimensions supplémentaires de la théorie des cordes peut se faire de diverses manières. Quand on tient compte de cette diversité (et des flux magnétiques généralisés qui sont associés), apparaît un quasi-continuum, quasi infini de lois physiques effectives différentes. Il se joue ici quelque chose de très important. Les lois de la physique telles que nous les connaissons se réinterprètent comme de simples paramètres environnementaux. Ce qui, d'ailleurs, est déjà en grande partie le cas dans le modèle standard, *via* la brisure spontanée de symétrie. Néanmoins, l'image de 10^{500} ou 10^{1000} lois physiques différentes prédites par la théorie des cordes résonne aujourd'hui fortement avec le scénario inflationnaire. Au chapitre 6, nous avons en effet montré qu'il était vraisemblable qu'une expansion accélérée du facteur d'échelle de l'Univers se soit produite dans un passé reculé. Mais, quand on regarde de près les modèles d'inflation, il apparaît qu'il est presque impossible de ne pas engendrer une inflation éternelle. Les zones « inflatant » se développant, par définition, exponentiellement plus vite que celles s'étant extraites de l'inflation (comme notre Univers), l'inflation demeure globalement sans fin. Autrement dit, c'est un « multivers » constitué d'univers-bulles qui se dessine. Dans cette approche, l'inflation crée des univers et la théorie des cordes les peuple avec des lois différentes. C'est une nouvelle vision du Cosmos qui se profile ici et peut-être une nouvelle blessure narcissique : après Copernic, Darwin et Freud, c'est notre Univers lui-même qui se trouverait déchu de son piédestal.

La théorie des cordes est indéniablement une très séduisante approche. Ses succès sont nombreux. Ses faiblesses aussi ; nous n'avons jamais vu plus de 4 dimensions, ni de supersymétrie, et le modèle standard n'est pas même clairement prédit. Les tests expérimentaux sont difficiles mais ne sont pas, en principe, impossibles. Tant qu'elle ne revendique pas l'exclusivité des recherches sur le sujet, elle est naturellement une voie privilégiée d'étude de la gravitation quantique.

Exercices

8.1 Retour sur les idées de la théorie des cordes

1. En quoi la théorie des cordes est-elle (en principe) une théorie unificatrice d'une part et gravitationnelle d'autre part ?
2. Dans quelle mesure peut-on dire que la théorie des cordes prédit la gravitation ?

8.2 Tour de Kaluza-Klein

On cherchera à montrer dans cette exercice comment un spectre discret d'excitations de particules apparaît lorsqu'une dimension supplémentaire compacte est ajoutée. Ce

spectre est appelé *tour de Kaluza-Klein*. Pour simplifier, nous considérons le cas de particules scalaires dont la dynamique est donné par l'équation de Klein-Gordon. Commençons avec l'espace-temps de Minkowski quadridimensionnel usuel, $x^\mu = (t, \mathbf{x})$.

1. Développez l'équation de Klein-Gordon pour un espace-temps minkowskien.
2. En introduisant la solution en onde plane

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

retrouvez la relation de dispersion usuelle en relativité restreinte et donnez le sens physique de ω et $\mathbf{k}$.

Ajoutons une dimension compacte à cet espace. Cette dimension compacte prendra l'allure d'un cercle de *rayon* R . Nous la nommerons ρ .

3. Généralisez l'équation de Klein-Gordon avec cette dimension supplémentaire.
4. En appelant k_R l'analogue de $\mathbf{k}$ suivant la dimension compacte ρ , généralisez la solution en onde plane de l'équation de Klein-Gordon.
5. Quelles sont les valeurs que peut prendre k_R ? S'agit-il d'un spectre discret ou continu ?
6. Donnez la relation de dispersion. Quel serait le terme de masse pour un observateur confiné sur les quatre dimensions usuelles ?

Remarque

L'équation de Klein-Gordon à D dimensions est toujours donnée par $\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi = 0$ avec la somme sur l'indice μ allant de 0 à $D-1$. La signature du tenseur de Minkowski est $(+, \dots, -)$ avec $(D-1)$ signe $(-)$. Pour un observateur qui n'a accès qu'aux quatre dimensions étendues, la relation entre énergie E , masse m et impulsion suivant les trois dimensions d'espace $\mathbf{p}$, appelé aussi relation de dispersion, est la formule usuelle de la relativité restreinte : $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$.

8.3 Potentiel newtonien à D dimensions

Le but de cet exercice est de relier la gravitation à D dimensions à la gravitation usuelle à quatre dimensions. Parmi ces D dimensions, une sera une dimension de temps et $(D-1)$ seront des dimensions d'espace. Le potentiel newtonien à D dimensions se comporte comme $1/r^{D-3}$ (ce qui se ramène au comportement usuel en $1/r$ dans un espace-temps 4-dimensionnel) : il n'y a donc *a priori* aucune raison de retrouver la gravitation usuelle avec un nombre arbitraire de dimensions supplémentaires. Toutefois, si seulement 4 des D dimensions (dont celle de temps) sont étendues tandis que les autres sont compactes et de taille R , on peut alors montrer que le potentiel en $1/r$ est retrouvé pour des échelles de longueur bien plus grande que la taille

des dimensions compactes. Ces différentes considérations seront ici abordées à l'aide du théorème de Gauss.

Commençons par l'espace-temps usuel à quatre dimensions. En appelant Φ le potentiel newtonien et ρ_M la masse volumique source de gravitation, le théorème de Gauss stipule que le flux du potentiel gravitationnel à travers une surface fermée S est égal à l'intégrale de la masse volumique contenue dans le volume V à l'intérieur de la surface S . Il se traduit mathématiquement par :

$$\iint_S (\mathbf{grad} \Phi \cdot \mathbf{n}) \, d^2 s = 4\pi G \iiint_V \rho_M(\mathbf{x}) d^3 v.$$

avec $\mathbf{n}$ le vecteur normal sortant à la surface S .

1. Donnez l'opérateur gradient en coordonnées sphériques. (On appellera (r, θ, φ) les coordonnées sphériques et $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ les vecteurs de base.)
2. On considère une distribution de masse *isotrope* contenue dans une boule de rayon R et de volume V , et de masse totale M . On cherchera à appliquer le théorème de Gauss pour déterminer le potentiel gravitationnel Φ .
 - (a) Compte tenu des symétries de la distribution de masse, que pouvez-vous dire du potentiel gravitationnel ? Quelle est *a priori* la surface la plus simple à considérer pour appliquer le théorème de Gauss ?
 - (b) Montrez que le potentiel gravitationnel à une distance $r > R$ vaut $-GM/r$.

Dans un espace-temps contenant $D > 4$ dimensions étendues, dont une dimension correspond au temps, le théorème de Gauss se généralise comme

$$\iint_{S_D} (\mathbf{grad}_{D-1} \Phi \cdot \mathbf{n}) \, d^{D-2} s_D = \left(\frac{\Omega_D}{D-3} \right) G_D \iiint_{V_D} \rho_M(\mathbf{x}) \, d^{D-1} v_D,$$

avec $G_D (\neq G)$ une constante de gravitation D -dimensionnelle, V_D un hypervolume d'espace, S_D une hypersurface d'espace et Ω_D l'angle solide généralisé d'une hypersphère. La masse volumique ρ_M est à comprendre comme la masse volumique dans un espace-temps à D dimensions.

3. (a) Quelle est la dimension d'un hypervolume d'espace et d'une hypersurface d'espace ? Donnez la dimension de la masse volumique D -dimensionnelle.
- (b) En adoptant la même stratégie que pour le cas quadridimensionnel, montrez que $\Phi_D = -G_D M / r^{D-3}$. (Un élément infinitésimal d'hypersphère de rayon r se relie à un élément infinitésimal d'angle solide généralisé *via* $d^{D-2} s_D = r^{D-2} \times d^{D-2} \Omega_D$.)

Relions maintenant les deux approches. On considère un espace à D dimensions tel qu'une dimension soit le temps, 3 dimensions d'espace sont étendues et enfin $(D - 4)$ dimensions sont compactes. La taille de ces dimensions compactes est notée R . Sans autre justification, nous admettrons que la présence de dimensions compactes se traduit de la manière suivante : i) pour $r \ll R$, la généralisation D -dimensionnelle précédente est une bonne approximation du théorème de Gauss et ii) pour $r \gg R$, le théorème est approximé par

$$V_{\text{compacte}} \times \iint_S (\mathbf{grad} \Phi \cdot \mathbf{n}) \, d^2 s = \left(\frac{\Omega_D}{D-3} \right) G_D \iiint_{V_D} \rho_M(\mathbf{x}) d^{D-1} v,$$

avec V_{compacte} le volume associé aux $(D - 4)$ dimensions compactes. On notera qu'à la différence du cas $r \ll R$, l'intégrale du flux se fait sur la surface *bidimensionnelle*. L'intégrale de la masse volumique est quant à elle à effectuer sur l'hypervolume de dimension $(D - 1)$.

4. Montrez que

$$\Phi(r \gg R) = - \frac{\Omega_D G_D M}{4\pi(D-3)V_{\text{compacte}} \times r},$$

puis donnez le lien entre la constante de Newton 4-dimensionnelle et la constante de Newton D -dimensionnelle.

Corrigés

8.1

1. La théorie des cordes est unificatrice dans le sens où à partir d'une unique classe d'objets – les cordes – elle est capable de reproduire l'ensemble des particules et de leurs interactions. Cette théorie est de plus gravitationnelle car dans le spectre des cordes fermées, apparaît une particule sans masse de spin 2 que l'on interprète comme le graviton, médiateur de l'interaction gravitationnelle.
2. Sans procédure de quantification, la théorie des cordes ne contient pas le graviton. Ce n'est qu'après une procédure de quantification que ce graviton apparaît. Ainsi, la gravitation n'apparaît *ab initio* dans la construction de la théorie mais seulement comme une conséquence (ou « prédiction ») de la quantification des cordes.

8.2

1. L'équation est

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 + m^2\Phi = 0.$$

2. On trouve la relation de dispersion $\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$. Ainsi, ω est l'énergie de la particule et $\mathbf{k}$ son impulsion.

3. On a, cette fois-ci,

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)^2 + m^2\Phi = 0.$$

4. La solution en onde plane est

$$\Phi(t, \mathbf{x}, \rho) = \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ik_R\rho) + \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + ik_R\rho).$$

5. Puisque la dimension ρ est compacte, des conditions aux limites périodiques s'appliquent : au bout de n tours, $\rho \rightarrow \rho + 2\pi nR$ mais la fonction doit, elle, rester de valeur inchangée. Cela donne $\Phi(t, \mathbf{x}, \rho + 2\pi nR) = \Phi(t, \mathbf{x}, \rho)$ avec n un entier relatif quelconque et impose donc un spectre *discret* des valeurs de k_R : $k_{R,n} = n/R$.

6. La relation de dispersion est maintenant

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 + m^2.$$

Pour un observateur confiné sur les 4 dimensions usuelles, l'énergie est ω , l'impulsion est $\mathbf{k}$ et la relation de dispersion *supposée* est la relation 4-dimensionnelle : $\omega^2 = |\mathbf{k}|^2 + m_{\text{eff}}^2$. Il voit donc une masse effective des particules

$$m_{\text{eff}} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2}.$$

Pour un tel observateur, il y a donc toute une zoologie de particules présentant un spectre de masse discret dont l'origine est la composante de l'impulsion suivant la dimension compacte non observable.

8.3

1. En coordonnées sphériques (r, θ, φ) , le gradient vaut

$$\mathbf{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi.$$

2. (a) Le potentiel gravitationnel sera lui aussi à symétrie sphérique : il ne dépendra que de r . Une surface S appropriée est alors une sphère de rayon $r_S > R$, englobant donc la distribution de masse.

- (b) Le terme de droite du théorème de Gauss est simplement $4\pi GM$. Pour une sphère, le vecteur normal sortant est $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ et son élément de surface est $d^2s = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, et celui de gauche est

$$\iint_S (\mathbf{grad} \Phi \cdot \mathbf{n}) d^2s = r^2 \frac{d\Phi}{dr} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi r^2 \frac{d\Phi}{dr}.$$

Le théorème de Gauss donne donc l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM}{r^2}.$$

Dont la primitive s'écrit :

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

3. (a) Le temps occupe une dimension. Ainsi, un hypervolume d'espace est de dimension $(D - 1)$ et une hypersurface d'espace est de dimension $(D - 2)$.
 (b) On considère de nouveau une distribution de masse qui est isotrope à $(D - 1)$ dimensions. Le potentiel newtonien ne dépendra de nouveau que de r . Le terme de droite du théorème de Gauss est alors $\Omega_D G_D M / (D - 3)$. Le terme de gauche est alors

$$\iint_{S_D} (\mathbf{grad}_{D-1} \Phi \cdot \mathbf{n}) d^{D-2}s_D = r^{D-2} \frac{d\Phi}{dr} \iint_{\Omega_D} d^{D-2}\Omega_D = r^{D-2} \Omega_D \frac{d\Phi}{dr}.$$

On trouve alors :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{G_D M}{(D - 3)r^{D-2}}$$

dont la primitive est :

$$\Phi(r) = -\frac{G_D M}{r^{D-3}}.$$

4. On applique le théorème de Gauss pour $r \gg R$. Le membre de gauche donne $V_{\text{compacte}} \times 4\pi r^2 (d\Phi/dr)$ tandis que le membre de droite donne $\Omega_D G_D M / (D - 3)$. En intégrant l'équation différentielle sur r on trouve donc

$$\Phi(r \gg R) = -\frac{\Omega_D G_D M}{4\pi(D - 3)V_{\text{compacte}} \times r}.$$

En identifiant, avec la définition quadridimensionnelle, les constantes de gravitation à 4 et D dimensions sont liées l'une à l'autre *via*

$$G = \frac{\Omega_D}{4\pi(D - 3)} \times \frac{G_D}{V_{\text{compacte}}}.$$

On voit donc que les deux constantes de Newton diffèrent. Il en sera de même pour l'intensité de l'interaction gravitationnelle.

VERS LA GRAVITATION QUANTIQUE : LA VOIE DES BOUCLES

9

INTRODUCTION

Ce chapitre entend présenter succinctement la gravitation quantique à boucles. Il s'agit d'une tentative de quantification, non perturbative et invariante de fond, du champ gravitationnel. Nous insistons sur les aspects conceptuels et les tests possibles, en particulier dans un contexte cosmologique.

9.1 IDÉES FONDAMENTALES

Si la théorie des cordes trouve son inspiration dans les succès de théorie quantique des champs et du modèle standard de la physique des particules, l'approche des boucles revient, quant à elle, aux fondamentaux. Pour élaborer une théorie quantique du champ gravitationnel, elle tente de concilier en profondeur les principes de base de la relativité générale et de la mécanique quantique. Non pas forcément les aspects les plus détaillés et élaborés de ces deux piliers de notre physique (par exemple une forme spécifique d'action – celle d'Einstein Hilbert – pour la première ou un type donné de propagateur pour la seconde) mais leurs fondements : invariance de fond et relation de commutation.

La gravitation quantique à boucles n'est pas – en tout cas, pas suivant ses objectifs premiers – une théorie d'unification. L'unification n'est pas inscrite dans le marbre de la loi scientifique (il n'existe d'ailleurs pas de tel marbre !). Elle a été un guide évidemment précieux dans le passé mais n'est pas absolument nécessaire. Contrairement à ce qu'on pense parfois, le sens de l'histoire n'a pas toujours été celui de l'unification. Il paraissait, en d'autres temps, tout à fait indispensable de trouver une formule permettant de déduire d'un principe premier les valeurs des rayons des orbites planétaires. Elles sont aujourd'hui acceptées comme purement contingentes. Peut-être faut-il (ré)apprendre à penser dans un monde pluriel ou plural. Au contraire

de l'unification, l'existence d'une théorie quantique de la gravitation ne semble pas optionnelle¹. La relativité générale prédit elle-même sa propre perte : au cœur des trous noirs ou lors du Big Bang, des singularités apparaissent. Autrement dit : dans certaines situations, la théorie ne fonctionne plus. Elle indique, d'elle-même, ses limites les plus évidentes. Très naturellement, ces limites se révèlent là où un traitement quantique semble indispensable.

La gravitation quantique à boucles est une théorie quantique du champ gravitationnel (et des champs de matière) qui est indépendante du fond et intègre pleinement la rétroaction de la matière sur la géométrie (ou sur le champ gravitationnel). L'indépendance de fond signifie qu'il n'existe pas une métrique privilégiée disponible mais, au contraire, que la métrique est entièrement dynamique. Celle-ci évolue de concert avec les champs matériels, en accord avec la relativité générale à la limite classique : c'est précisément le sens de la rétroaction. Il est primordial de se convaincre immédiatement qu'il s'agit d'une forme totalement nouvelle de théorie quantique des champs. La mécanique quantique usuelle ne respecte pas du tout l'indépendance de fond. Mentionnons simplement qu'au cœur de la construction de la théorie quantique des champs habituelle se trouve l'axiome de localité. Celui-ci considère des algèbres locales $\mathcal{U}(O)$ définies sur des régions O d'un espace-temps (M, g_0) où M est une variété différentielle (un manifold) et g_0 une métrique sur M . L'axiome stipule que si O et O' sont séparées par un intervalle de type espace suivant la métrique g_0 (autrement dit s'il n'existe pas de géodésique causale liant les points de O à ceux de O'), alors les deux algèbres $\mathcal{U}(O)$ et $\mathcal{U}(O')$ (anti)commutent. Il apparaît ici clairement que sans métrique g_0 on ne sait même pas ce qu'une théorie quantique des champs au sens habituel pourrait être puisqu'on ne connaît même pas l'algèbre des opérateurs de champs ! Clairement, il y a beaucoup à réinventer...

Le problème est profond. En relativité générale, le champ gravitationnel est supposé être un champ classique déterministe qu'on identifie avec la métrique pseudo-riemannienne de l'espace-temps. Mais la mécanique quantique laisse clairement penser que *tous* les champs manifestent des propriétés quantiques. Réciproquement, la théorie quantique des champs standard se fonde sur l'invariance globale de Poincaré et sur l'existence d'une métrique de fond non dynamique. Mais la relativité générale nous laisse entendre que *toutes* les structures sont dynamiques.

Que pourrait donc être un espace-temps quantique et relativiste à l'échelle de Planck ?

Beaucoup d'arguments simples laissent penser qu'il doit exister une échelle spatiale minimale, vraisemblablement égale à la longueur de Planck (il suffit de concilier les inégalités de Heisenberg avec la relativité restreinte, qui borne la vitesse, et avec

1. Encore qu'il soit, là aussi, légitime de se poser la question. Certaines approches de la gravitation, par exemple en tant que force entropique émergente, pourraient outrepasser cette nécessité.

la relativité générale, qui borne la masse pouvant être concentrée dans une région donnée). L'espace n'est sans doute pas indéfiniment divisible.

Par ailleurs, la relativité générale nous montre que la dynamique du champ gravitationnel ne fait *pas* intervenir un temps externe qui jouerait le rôle d'une variable d'évolution indépendante. Strictement parlant, la relativité générale ne permet pas de décrire l'évolution d'un système en termes d'une variable temps observable. La relativité générale prédit des *relations*. Fondamentalement, c'est le concept même de temps qui est ici déconstruit. On ne mesure jamais le temps mais uniquement des corrélations entre états de systèmes (différentes positions de la trotteuse d'une montre pour différentes positions d'une pierre chutant de la tour de Pise).

Le défi premier de la gravitation quantique consiste donc sans doute à trouver une manière de penser le monde en l'absence des notions familières d'espace et de temps. Ce qui revient à dire, dans les termes de Rovelli, que les états quantiques du champ gravitationnel ne peuvent pas être interprétés comme les états à n particules de la théorie quantique des champs usuelle sur un espace-temps donné. Au contraire, ces états quantiques doivent eux-mêmes déterminer et définir l'espace-temps.

La quantification canonique du champ gravitationnel conduit à des solutions sous forme de boucles. Elles sont en quelque sorte l'équivalent gravitationnel des lignes de Faraday en électromagnétisme. Comme la relativité générale nous a appris que l'espace-temps et le champ gravitationnel sont une seule et même chose, ces boucles ne sont pas dans l'espace : elles *sont* l'espace. Dans cette approche, nous devons nous penser comme vivant dans ces boucles. Le monde comme un ensemble de champs, éventuellement quantiques, en interaction les uns avec les autres et en interaction avec les boucles de champ gravitationnel. Les intersections de boucles constituent les quanta d'espace. Les grains fondamentaux. Au fur et à mesure que la théorie se développait, les intersections devinrent presque plus importantes que les lignes elles-mêmes. Il est plus fructueux de penser en termes de points (les intersections) reliés entre eux par des liens. C'est ce qu'on nomme un réseau. Le nombre de « lignes de Faraday » rencontrées sur un même lien est un nombre entier qu'on peut associer à ce lien. On l'appelle le spin du lien (noté par le demi-entier associé) et l'approche résultante se nomme la théorie des réseaux de spin. C'est une reformulation de la gravitation quantique à boucles.

Pour le dire de façon légèrement plus formelle, considérons un état quantique d'espace $|s\rangle$ formé par N « grains » d'espace dont certains sont adjacents. On peut représenter cet état comme un graphe abstrait Γ ayant N nœuds. Ces nœuds sont les grains d'espace tandis que les liens figurent les relations de contiguïté et représentent les surfaces séparant deux grains adjacents. L'état quantique est alors caractérisé par un graphe Γ et par des labels associés aux liens et aux nœud : le label i_n associé au nœud n est le nombre quantique de volume et le label j_m associé au lien m est le nombre

quantique d'aire. Un réseau de spin est l'ensemble (Γ, i_n, j_m) . On peut montrer que les nombres quantiques i_n et j_m sont déterminés par des représentations du groupe² de jauge local $SU(2)$.

Comme nous l'avons mentionné, l'élément central de toute cette approche est l'indépendance de fond, le fait qu'il n'existe aucune structure fixe, figée, absolue, statique. C'est le grand message de la relativité générale. Et il est ici considéré comme un principe constitutif indispensable à la construction d'une théorie quantique (et relativiste) de la gravitation. Comme expliqué dans le chapitre 5, cette indépendance de fond se traduit par l'invariance de jauge de la théorie sous l'action des difféomorphismes, elle-même assurée par l'invariance par changement arbitraire du système de coordonnées et l'absence de champ non dynamique. À l'instar de la relativité générale, la recherche d'une théorie quantique de la gravitation par la voie des boucles s'intéresse donc à un modèle *de* l'espace-temps et non à un modèle *dans* l'espace-temps.

Une dernière remarque intuitive peut être faite sur le rôle des boucles. En théorie quantique des champs usuelle, sur un fond continu, l'idée de formuler la théorie en termes d'excitations de boucles ne s'est pas avérée féconde. La difficulté essentielle vient de ce que les états de boucles sont « trop nombreux », conduisant à une théorie singulière. Un déplacement infinitésimal sur le fond engendre de nouveaux états et ce continuum donne lieu à un modèle qui n'est pas utilisable. Les choses vont autrement dans une théorie indépendante de fond. C'est l'élément essentiel de la gravitation quantique à boucle. L'espace étant lui-même fait de boucles, le positionnement ne vaut que relativement à une autre boucle et non pas de manière absolue sur un fond. Un déplacement infinitésimal d'un état de boucle ne génère plus un nouvel état mais simplement une représentation équivalente de jauge au premier état ! Seul un déplacement fini tombant sur un nouvel état de boucle génère un nouvel état physique. La taille de l'espace des états de boucle s'est considérablement réduite. Autrement dit, l'indépendance de fond, traduite par l'invariance par difféomorphisme, régularise la théorie. Il est par ailleurs intéressant de noter que, si l'indépendance de fond permet une formulation de la théorie, convenable et praticable, en terme d'excitations de boucles, c'est, réciproquement, en formulant la théorie en terme de boucles qu'une quantification indépendante de fond est possible.

9.2 UN PEU DE FORMALISME

Dans son développement historique, la gravitation quantique à boucles a fait grand usage de l'approche canonique de la relativité générale où la géométrie de l'espace-temps est décrite en termes de champs sur des surfaces spatiales. Il est en effet

2. On peut voir $SU(2)$ comme le groupe des matrices unitaires 2×2 à coefficients complexes et de déterminant 1. Une matrice quelconque de $SU(2)$ peut être décomposée suivant une base formée par la matrice identité et les trois matrices de Pauli.

toujours possible d'effectuer un feuilletage (ou foliation) de l'espace-temps (quadridimensionnel) : chaque « feuille » de cet empilement correspond à une hypersurface spatiale tridimensionnelle tandis que la quatrième dimension, qui traverse ces hypersurfaces, correspond à la dimension temps. La géométrie sur une surface Σ est encodée dans la métrique spatiale q_{ab} qui correspond aux variables de configuration. Ici il s'agit bien d'une métrique purement *spatiale* et non pas spatio-temporelle : $a, b = 1, 2, 3$. Les moments conjugués à ces variables s'expriment avec la courbure extrinsèque K_{ab} qui représente intuitivement la dérivée de la métrique spatiale par rapport au changement de surface spatiale³. Ces champs ne sont toutefois pas arbitraires puisqu'ils découlent d'une solution des équations d'Einstein obtenue en choisissant une coordonnée temporelle à partir de laquelle sont définies les surfaces spatiales. Un tel choix peut briser la covariance générale de la théorie et il est donc nécessaire d'imposer que la géométrie de l'espace-temps, décrite en terme de feuilletage, soit covariante.

Dans ce formalisme hamiltonien, ceci se traduit par la présence de contraintes sur les champs. D'abord, la contrainte de difféomorphisme qui génère les déformations de la surface spatiale. Quand elle est satisfaite, cette contrainte assure que la géométrie spatiale ne dépend pas du système de coordonnées d'espace. Ensuite, la contrainte hamiltonienne assure la covariance générale de l'espace-temps, en incluant la coordonnée temporelle. Cette contrainte est également importante pour la dynamique de la théorie : quand elle est satisfaite, elle encode les relations entre les champs de matière et le champ gravitationnel. Il apparaît très clairement que l'évolution est purement *relationnelle*.

Dans ce cadre, on ne décrit généralement pas la géométrie spatiale par la métrique mais par une triade e_i^a qui définit trois vecteurs orthogonaux et normalisés en chaque point. Toute l'information sur la géométrie spatiale y est contenue et la métrique inverse (covariante) s'obtient immédiatement par $q^{ab} = e_i^a e_i^b$ où l'on somme sur l'indice i . Les triades peuvent subir une rotation sans que la métrique soit modifiée. Il s'ensuit une liberté de jauge supplémentaire avec le groupe $SO(3)$ agissant⁴ sur l'indice i . L'invariance de la théorie sous les rotations est garantie par une troisième contrainte, dite de Gauss, qui s'ajoute donc aux contraintes hamiltonienne et de difféomorphisme.

À ce stade, nous n'avons que mentionné une ébauche de réécriture possible de la relativité générale. Le but poursuivi est évidemment d'obtenir une formulation

3. On peut facilement se représenter un tel feuilletage dans le cas de la cosmologie. La métrique FLRW, donnée par $ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[(1 - k\sigma^2)^{-1} d\sigma^2 + \sigma^2 d\theta^2 + \sigma^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]$, procède justement d'une telle décomposition : la « trame » spatiale de notre cosmos s'étirant avec le temps cosmique correspond aux hypersurfaces. La dynamique totale de l'Univers est alors décrite par la métrique spatiale de ces hypersurfaces (les fonctions $a(t)$ et la valeur de k) ainsi que leur courbure extrinsèque, reliée à $\dot{a}$.

4. $SO(3)$, le groupe spécial orthogonal à 3 dimensions, est le groupe des rotations.

propice à la quantification. Le schéma de quantification se fonde sur le programme de Dirac qui consiste à obtenir une algèbre (dite de Poisson) classique de variables sur l'espace de phase et à la représenter comme une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert (dit cinématique). Il faut ensuite implémenter les contraintes qui doivent également s'écrire comme des opérateurs sur l'espace de Hilbert. Si le lecteur n'est pas familier avec ces techniques, il peut retenir que c'est un ensemble de prescriptions quantiques « usuelles » essentiellement indépendantes de la problématique spécifique de la gravitation quantique.

L'approche historique de la gravitation quantique par Wheeler et DeWitt consiste à utiliser un espace de Hilbert de fonctionnelles⁵ de la métrique spatiale $\psi[q]$. Hélas, l'espace des métriques est mal compris mathématiquement. C'est une des raisons pour lesquelles l'équation de Wheeler-DeWitt, bien que très élégante, n'a pas été en mesure de conduire à de véritables prédictions. C'est précisément pour cela que de nouvelles variables, introduites par Ashtekar, doivent être utilisées.

On définit alors des grandeurs liées aux triades mais différant de celles-ci par un facteur multiplicatif (jacobien) : les densités de triades $E_a^i = |\det(e_j^b)|^{-1} e_i^a$. Elles sont canoniquement conjuguées aux coefficients de courbure extrinsèque :

$$\{K_a^i(x), E_j^b(y)\} = 8\pi G \delta_a^b \delta_j^i \delta(x, y). \quad (9.1)$$

Le crochet de Poisson est un opérateur usuel en mécanique hamiltonienne défini par

$$\{f, g\} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right], \quad (9.2)$$

où (p_i, q_i) sont des coordonnées conjuguées sur l'espace de phase. L'intérêt de cet opérateur est lié à ce que les équations d'évolution de Hamilton-Jacobi s'expriment très simplement dans ce formalisme.

On remplace alors la courbure extrinsèque par la connexion d'Ashtekar :

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i, \quad (9.3)$$

où γ est un paramètre, dit de Barbero-Immirzi. Classiquement ce paramètre ne change pas les équations du mouvement de la théorie. Il joue néanmoins un rôle majeur lors de la quantification. L'objet Γ_a^i se nomme connexion de spin. Au niveau intuitif (en quelque sorte), on peut considérer qu'il intervient dans l'extension de la dérivée covariante à des objets présentant des indices mixtes (permettant d'annihiler les triades, de

5. Une fonctionnelle peut être vue comme une machine prenant une fonction comme argument et fournissant un nombre en retour. Par exemple, sur l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut définir une fonctionnelle qui prend une fonction f arbitraire de cet ensemble et donne la valeur de l'intégrale de son module carré (autrement dit la norme de f au carré) : $\Psi[f] = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$.

la même manière que la dérivée covariante de la métrique est nulle). Cette connexion d'Ashtekar (9.3) est définie de manière à être conjuguée aux densités de triades :

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = 8\pi\gamma G \delta_a^b \delta_j^i \delta(x, y). \quad (9.4)$$

Reste à implémenter les trois contraintes précédentes dans ce formalisme, ce qui est assez lourd à écrire mais ne présente pas de difficulté conceptuelle particulière.

Le point nodal est que l'espace des connexions d'Ashtekar, qui est maintenant l'espace de configuration, est nettement mieux compris que l'espace des métriques. De plus, cette formulation est parfaitement adaptée à une quantification invariante de fond.

Il faut savoir que lors de la quantification d'une théorie des champs, il est indispensable de « moyenner » les champs, c'est-à-dire de les intégrer sur une certaine région afin d'obtenir une algèbre bien définie sans distribution de Dirac comme celles qui apparaissent dans l'équation (9.4). Habituellement, cette intégration est menée sur une région d'espace tri-dimensionnelle. Si néanmoins on procédait de la sorte ici, l'invariance de fond serait immédiatement brisée puisqu'un fond, précisément, apparaîtrait d'ores et déjà à ce stade très préliminaire de la théorie. Fort heureusement, il existe une façon de « moyenner » qui ne requiert pas l'introduction d'une métrique de fond. À la place d'utiliser une région tridimensionnelle, il suffit d'intégrer la connexion d'Ashtekar sur une courbe unidimensionnelle e , paramétrée par s , et d'en prendre l'exponentielle pour former ce qui est nommé une holonomie :

$$h_e(A) \propto \exp \left[\int_e \tau_i A_a^i \dot{e}^a \right] ds, \quad (9.5)$$

où $\dot{e}^a = \frac{de^a(s)}{ds}$ est un vecteur tangent à la courbe e et τ_j sont trois matrices qui s'expriment en fonction de matrices de Pauli⁶ σ_j par $\tau_j = -\frac{i}{2}\sigma_j$. Sans entrer dans les détails techniques, mentionnons juste que la raison pour laquelle il faut prendre l'exponentielle de l'intégrale est liée à la nécessité d'obtenir un objet effectivement covariant. De manière similaire, la densité de triade peut être naturellement intégrée sur une surface bidimensionnelle, conduisant à des flux :

$$F_S(E) = \int_S \tau^j E_i^a n_a d^2y. \quad (9.6)$$

6. Les matrices de Pauli σ_j (au nombre de 3) sont des matrices 2×2 complexes, hermitiennes et unitaires. Avec la matrice identité, elles constituent une base du groupe $SU(2)$ qui est une représentation de dimension 2 du groupe $SO(3)$, c'est-à-dire des rotations d'espace. C'est en particulier grâce aux matrices de Pauli que l'on peut décrire comment une particule de spin 1/2 comme l'électron se transforme lors d'une rotation d'espace. Elles sont aussi liées aux symétries d'isospin et sont très importantes en mécanique quantique relativiste.

L'algèbre (de Poisson) des holonomies et flux est bien définie et il est possible de chercher des représentations sur un espace de Hilbert. C'est à partir de ces grandeurs que la procédure de quantification « à la Dirac » peut être menée. L'espace peut être construit de façon que les états soient des fonctionnelles des connexions. Les holonomies jouent alors le rôle d'opérateurs de création à partir d'un état fondamental qui ne dépend pas des connexions.

Il existe bien évidemment plusieurs manières de présenter la gravitation quantique à boucles et le fait que toutes ces approches semblent converger vers la même théorie donne naturellement confiance en l'ensemble de la démarche. À titre d'exemple, on peut ici citer une présentation plus proche de ce qui est usuellement rencontré en physique des particules, inspirée de celle proposée par Rovelli à l'école de Zakopane. En chromodynamique quantique (QCD), on obtient une description non-perturbative en approximant la théorie complète sur un réseau et en considérant ensuite la limite appropriée pour réintroduire tous les degrés de liberté fondamentaux. Les variables sont les éléments du groupe de jauge associés aux liens du réseau. On définit ensuite l'espace d'Hilbert comme l'ensemble des fonctions de carré sommable sur le groupe quotient GL/GN où GL est associé aux liens et GN aux nœuds. L'espace d'Hilbert de la gravitation quantique est construit de façon analogue. Mais, dans ce cas, le groupe est $SU(2)$, et non plus celui de QCD, puisque $SU(2)$ est le groupe d'invariance locale de l'espace suivant lequel la relativité générale peut être écrite comme une théorie de jauge. Moyennant quelques précautions sur la définition rigoureuse d'une relation d'équivalence (deux états sont équivalents s'ils sont liés par le groupe d'automorphismes – *i.e.* d'isomorphismes internes – du graphe), l'espace d'Hilbert est, là encore, obtenu en passant à la limite permettant de réintroduire les degrés de liberté initialement tronqués.

Notons qu'il existe, au moins dans le domaine classique, une interprétation géométrique simple du modèle. Le théorème « spin-géométrie » de Penrose permet en effet de comprendre les grandeurs essentielles construites à partir des opérateurs sur cet espace d'Hilbert comme définissant complètement la forme de polyèdres ! Une collection de tels polyèdres, collés les uns aux autres, forme une métrique (non différentiable) où la courbure est concentrée sur les arêtes. Est ainsi dérivée une géométrie discrète et, par conséquent, un champ gravitationnel. Il est alors possible de construire de manière rigoureuse des opérateurs de surface et de volume et de calculer exactement leurs spectres, qui encodent la structure quantique de l'espace-temps. De façon remarquable, la gravité quantique à boucles permet de donner les valeurs propres de ces opérateurs de façon précise, et ce jusqu'à l'échelle de Planck.

Comme pour le chapitre d'introduction à la théorie des cordes, il est bien clair que ce paragraphe n'ambitionnait pas de donner les outils nécessaires pour mener des calculs en gravitation quantique à boucles. Nous souhaitons simplement offrir

un petit parfum de ce à quoi le formalisme de cette approche peut ressembler. De façon très clair, la démarche est différente de celle des cordes. Ici, dès la construction, les principes centraux des théories à concilier sont pris en compte. Au prix d'un renoncement aux velléités unificatrices.

9.3 COSMOLOGIE QUANTIQUE À BOUCLES

La gravitation quantique à boucles a été appliquée aux deux systèmes les plus cruciaux pour tester une théorie de ce type : les trous noirs et l'univers primordial. Concernant les premiers, deux résultats spectaculaires ont été obtenus. D'abord, la singularité centrale est régularisée. Ensuite, la mystérieuse entropie qui apparaît macroscopiquement a pu être déduite d'un dénombrement rigoureux des degrés de liberté microscopiques⁷. Le fait que l'entropie soit proportionnelle à l'aire est ainsi démontré dans ce contexte. Le coefficient de proportionnalité dépend du paramètre de Barbero-Immirzi et ce dernier peut ainsi être fixé. Il serait évidemment préférable que le modèle prédise automatiquement la bonne valeur de cette constante mais ce n'est pas aujourd'hui le cas.

Le plus grand succès phénoménologique de la gravitation quantique à boucles vient sans doute de son utilisation pour décrire le système le plus simple et le plus symétrique : l'Univers dans son ensemble. À l'heure actuelle la cosmologie quantique à boucles n'a pas encore pu être parfaitement et rigoureusement dérivée de la théorie mère : elle est plutôt inspirée de ses méthodes et de ses concepts. Vraisemblablement, le plus beau résultat de cette approche est la résolution de la pathologie du Big Bang. L'approche historique de Wheeler-DeWitt ne « lissait » pas la singularité originelle : le modèle suivait la prédiction de la relativité générale et conduisait à un état primitif divergent. Au contraire, la cosmologie quantique à boucles n'est *pas* singulière ! Strictement parlant, le Big Bang disparaît. Il est remplacé par une sorte de grand rebond (*Big Bounce*) en amont duquel il est possible de remonter vers un univers de plus en plus grand et de plus en plus « classique ». Ce qu'on nommait Big Bang serait à réinterpréter comme un simple goulet d'étranglement. Il s'agit à l'évidence d'une immense révolution conceptuelle. L'ensemble de l'édifice est évidemment spéculatif mais, au moins au sein de ce paradigme, la prédiction est robuste. L'image résultante peut être celle d'un univers cyclique rebondissant éventuellement sans fin ou celle d'un univers ayant subi un unique rebond. Dans les deux cas, l'aporie la plus sévère du Big Bang, le fait qu'il y ait apparition – et de manière singulière – de l'Univers, est ici résolue : le cosmos existe de toute éternité. En cosmologie quantique à boucles, le problème de la singularité initiale est dépassé de façon

7. La théorie des cordes a également permis de retrouver l'entropie classique des trous noirs dans certaines situations spécifiques.

essentiellement analogue à la manière dont la mécanique quantique usuelle permet de stabiliser l'atome d'hydrogène (l'électron s'effondrerait sur le noyau très rapidement sans effet quantique). C'est une théorie qui tente de tirer toutes les conséquences de la physique déjà connue. Mais, de façon spectaculaire, l'image d'ensemble de notre monde s'en trouve radicalement modifiée ! Il a été montré que l'évolution demeure déterministe à travers le rebond cosmologique et qu'aucun principe fondamentalement nouveau n'est donc nécessaire pour résoudre le problème de la singularité. Il est important de se convaincre que la question posée était extrêmement délicate : il s'agit de trouver une théorie qui génère des effets répulsifs (des effets de géométrie quantique donc) suffisamment intenses pour contrebalancer l'attraction « usuelle » de la gravitation dans la région de Planck (attraction gigantesque puisque la densité est de l'ordre de $10^{91} \text{ kg.cm}^{-3}$) mais dont, néanmoins, les effets intégrés sur 14 milliards d'années sont assez négligeables pour que l'Univers contemporain soit très bien décrit par la relativité générale ! Tel est le succès de la cosmologie quantique à boucles.

La première équation de Friedmann donnée au chapitre 5 s'écrit, sans courbure ni constante cosmologique :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (9.7)$$

Dans le cadre de la cosmologie quantique à boucles, elle est essentiellement remplacée par⁸ :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right). \quad (9.8)$$

On voit ici qu'il apparaît maintenant une densité maximale, ρ_c , vraisemblablement de l'ordre de la densité de Planck, qui ne peut être dépassée. Le fait que ce terme quadratique intervienne avec le bon signe (négatif) est un des attraits du scénario : les modèles de cosmologie branaire conduisent génériquement à une correction positive en ρ^2 qui ne fait qu'aggraver la singularité.

De plus, il a été récemment montré que la cosmologie quantique à boucles semblait prédire l'inflation. La raison est simple. Lors de la contraction qui précède le rebond, un champ massif quelconque présent dans l'univers, voit ses fluctuations amplifiées par la dynamique du facteur d'échelle (simplement parce qu'une constante de Hubble négative se comporte comme un terme d'antifriction). Le champ « grimpe » donc sur son potentiel. Mais, juste après le rebond, l'univers est en expansion, la constante de Hubble devient positive et le terme correspondant dans l'équation d'évolution est alors un terme de friction : le champ est figé haut sur son potentiel ! Comme montré dans l'exercice 6.3, ce sont exactement les conditions permettant l'émergence de

8. De façon plus précise, il s'agit ici d'une description *effective* de la cosmologie quantique à boucles qui permet d'introduire les corrections quantiques de premier ordre. Il est toutefois montré que cette description effective reste extrêmement précise.

l'inflation. Le fait qu'une quantification canonique des équations d'Einstein prédise l'un des piliers du modèle cosmologique – souvent introduit de façon *ad hoc* – est remarquable. Mais beaucoup reste à vérifier : la démarche est encore dans sa première jeunesse.

La question cruciale qui se pose aujourd'hui est naturellement celle de la testabilité de la gravitation quantique à boucles. Le test clé consisterait sans doute à mesurer les aires et volumes et à montrer leur caractère discret. Hélas, il n'est évidemment pas envisageable de disposer d'instruments de mesure qui approcheraient de la précision requise. Une belle idée émise il y a quelques années consisterait à chercher une éventuelle violation de l'invariance de Lorentz en étudiant les photons émis par des astres très lointains : même dans le domaine *gamma* leur énergie est nettement inférieure à celle de Planck mais, intégré sur des milliards d'années-lumière, un très petit effet pourrait suffire à induire une différence de temps d'arrivée entre les photons les moins énergétiques et ceux les plus énergétiques. Ces derniers devraient, en effet, d'avantage « sentir » la structure granulaire de l'espace-temps. Néanmoins, rien n'indique aujourd'hui de façon très claire que l'invariance de Lorentz doivent être nécessairement violée dans ce cadre. Le fait qu'il faille penser non plus en terme de longueurs mais en termes de valeurs propres d'opérateurs de longueur change radicalement l'interprétation de la transformation de Lorentz.

À l'heure actuelle, la voie la plus prometteuse pour tester de modèle est certainement la cosmologie. La propagation des modes physiques est altérée par les corrections quantiques, et la dynamique du fond cosmologique (du facteur d'échelle), est elle-même profondément modifiée au voisinage du Big Bang (ou de ce qui en tient maintenant lieu). L'inflation permettant de porter les plus petites échelles jusqu'à des tailles macroscopiques (parfois même plus grandes que l'horizon de Hubble), il est possible que de fines empreintes de ces effets demeurent visibles dans le fond diffus cosmologique. C'est un défi majeur pour l'avenir. Le fait que cette physique à l'échelle de Planck, réputée instable, entre lentement dans le champ observationnel est, en tout état de cause, extrêmement réjouissant.

Exercices

9.1 Les idées de la gravité quantique à boucles. Longueur de Planck

1. En quoi l'approche des boucles diffère-t-elle de l'approche des cordes ?
2. On considère un objet de masse m et de vitesse v . On réintègrera les constantes $\hbar$ et c (constante de Planck et vitesse de la lumière).
 - (a) D'un point de vue quantique, donnez la taille minimale de l'objet en fonction de $\hbar$, m et c .
 - (b) Quelle est de nouveau la taille minimale de l'objet, mais d'un point de vue gravitationnel ?
 - (c) Montrez alors que la taille minimale imposée par la mécanique quantique et la relativité générale est $x_{\min} = L_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar G/c^3}$?

Remarque

On rappelle le principe d'Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Pour une masse donnée, un trou noir est l'objet le plus compact dans le sens où, si l'on confine une masse m à l'intérieur d'une sphère de rayon $r < r_s$ où r_s est le rayon de Schwarzschild, l'objet s'effondre nécessairement sur lui même pour former un trou noir.

9.2 Retour sur les tétrades

Le but de cet exercice est de se familiariser avec le concept de tétrade. Les tétrades sont non seulement utiles en gravité quantique, mais aussi pour construire une formulation, en espace-temps courbe, complètement covariante de théories faisant intervenir des objets comme les *spineurs*. Les spineurs sont une représentation du groupe de Lorentz physiquement intéressante : ils décrivent les particules de spin demi-entier comme l'électron, les quarks, etc. Néanmoins, ces objets ne se transforment pas comme des tenseurs sous l'action d'une transformation de Lorentz (il s'agira d'une représentation appropriée desdites transformations). Les tétrades permettent d'incorporer ces objets dans un espace-temps courbe. Nous ne rentrerons pas ici dans les détails des spineurs mais nous montrerons tout de même comment les transformations de Lorentz sont implémentées à l'aide des tétrades pour un quadrivecteur.

On considère un espace-temps de courbure arbitraire. En vertu du principe d'équivalence, il est possible de trouver en chaque point X de cet espace-temps un système de coordonnées localement inertielles, appelées $\xi^I(X)$. Les indices I, J etc. correspondent aux indices μ, ν etc. usuels (ils varient donc de 0 à 3) mais présentent toutefois la particularité de concerner des coordonnées localement inertielles. Nous les

utiliserons *uniquement* pour le système de coordonnées localement inertiel. (L'avantage d'une telle notation sera claire au fur et à mesure de l'avancée dans l'exercice.)

1. Pensez-vous que le système $\xi^I(X)$ puisse être globalement inertiel (justifiez) ?
2. Donnez l'expression de la métrique g_{IJ} en X dans le système de coordonnées $\xi^I(X)$.
3. Donnez l'expression du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ en X , dans un système de coordonnées curvilignes quelconque x^μ , en fonction de g_{IJ} . Donnez l'expression inverse, *i.e.* g_{IJ} en fonction de $g_{\mu\nu}$.

On définit $e_\mu^I(X)$ comme

$$e_\mu^I(X) \equiv \left. \frac{\partial \xi^I}{\partial x^\mu} \right|_X.$$

4. Comment les quantités $e_\mu^I(X)$ se transforment-elles par changement global de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$? Comment interprétez-vous $e_\mu^I(X)$ par rapport aux indices μ ?

Les quatre champs de vecteur $e_\mu^I(X)$ forment une tétrade. On peut les voir comme l'ensemble des quatre vecteurs (un vecteur pour chaque valeur de l'indice I) qui, en chaque point de l'espace-temps, forment une base localement inertielle.

5. Justifiez que $e_{I\mu} = \eta_{IJ} e_\mu^J$ et $e^{I\nu} = g^{\mu\nu} e_\mu^I$ (autrement dit, que η_{IJ} abaisse ou monte les indices I, J , etc. tandis que $g_{\mu\nu}$ monte ou abaisse les indices μ, ν , etc.).
6. Montrez que $e_\mu^I e_I^\nu = \delta_\mu^\nu$, et $e_\mu^I e_J^\mu = \delta_J^I$.

Pour comprendre l'utilité des tétrades, considérons en chaque point d'espace-temps, une transformation de Lorentz locale. Dans un espace plat, cela se traduit par $A^\alpha \rightarrow A^\beta = \Lambda^\beta_\alpha A^\alpha$ avec A^α un quadrivecteur et Λ^β_α la notation tensorielle des transformations, de Lorentz. En espace plat $\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta = \eta_{\gamma\delta}$.

7. Soit un vecteur contravariant $A^\mu(X)$. Comment interpréteriez-vous de façon intuitive les quatre quantités $A^I(X) = A^\mu(X) e_\mu^I(X)$?
8. Soit la transformation de Lorentz locale $\Lambda^\mu_\nu(X)$. Dans le système de coordonnées localement inertielles, que vaut $\eta_{IJ} \Lambda^I_K \Lambda^J_L$? Donnez l'expression de A^J en fonction de A^I (toujours dans le système de coordonnées localement inertielles).
9. En déduire la relation entre A'^μ et A^μ . Donnez l'expression de $\Lambda^\mu_\nu(X)$ et fonction de A^I_J et du champ de tétrade.

9.3 Une première approche de cosmologie quantique : l'équation de Wheeler-DeWitt

Les idées de la gravité quantique à boucles peuvent évidemment être appliquées au cas de la cosmologie. Nous nous intéresserons dans cet exercice à une première tentative (ici présentée dans une version nettement simplifiée), antérieure à la cosmologie

quantique à boucles, de construction d'une cosmologie quantique. Cette approche, initiée par J.-A. Wheeler et B. DeWitt, utilise une formulation hamiltonienne de la dynamique. Cette construction se fera en deux étapes. La première consiste à reformuler les équations de Friedmann dans un langage hamiltonien, la dynamique étant fixée par l'hamiltonien et les crochets de Poisson. La seconde étape consiste à quantifier la théorie en remplaçant les variables canoniques de « position » et « d'impulsion » par des opérateurs et les crochets de Poisson par des « crochets » de commutation. (L'approche de Wheeler-DeWitt présente toutefois le problème d'être une cosmologie quantique qui, à l'instar de la cosmologie classique, reste *singulière* dans certaines situations. Ce n'est qu'à l'aide du formalisme de la cosmologie quantique à boucles que ce problème de singularité initiale peut être génériquement résolu dans ce cadre.)

Nous supposons ici que l'Univers est plat $k = 0$, sans constante cosmologique et rempli d'un champ scalaire libre Φ . Les variables canoniques de position et d'impulsion d'un tel Univers sont (a, p_a) (elles caractérisent l'expansion, ou la contraction de l'Univers) et pour le champ scalaire (Φ, p_Φ) (elles caractérisent la dynamique du champ scalaire). L'hamiltonien est alors :

$$H = -\frac{3}{32\pi G} \times \frac{p_a^2}{a} + \frac{1}{2} \times \frac{p_\Phi^2}{a^3}.$$

Commençons avec les équations classiques.

1. Donnez les valeurs de $\{a, p_a\}$ et $\{\Phi, p_\Phi\}$.
2. Donnez les équations de Hamilton pour le système-Univers avec champ scalaire.
3. Donnez les expressions de p_a et p_Φ en fonction de a , $\dot{a}$ et $\dot{\Phi}$.
4. Comment interpréter alors la contrainte $H = 0$?
5. Montrez que les équations de Hamilton pour Φ et p_Φ se ramènent à la deuxième équation de Friedmann.
6. Passons à la quantification. Une approche possible consiste à remplacer les variables canoniques par des opérateurs tels que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ (les opérateurs seront notés comme $f \rightarrow \hat{f}$). La dynamique s'obtient donc en remplaçant les variables canoniques classiques par leur définition en tant qu'opérateurs dans l'hamiltonien qui s'appliquera alors à une fonction d'onde.
7. Montrer que si $\hat{\Phi} = \Phi$ et $\hat{p}_\Phi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \Phi}$, on a bien $[\hat{\Phi}, \hat{p}_\Phi] = i\hbar$.
8. Proposez une définition des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{p}_a$.
9. Proposez alors une forme de l'équation de Wheeler-DeWitt définie comme $\hat{H}\Psi(a, \Phi) = 0$, la « version » quantique de $H = 0$ avec $\Psi(a, \Phi)$ la *fonctionnelle* d'onde de l'Univers.

Remarque

On pourra utiliser la notation $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Pour un couple de variables canoniques (x, p) , où x est la variable de configuration et p la variable d'impulsion conjuguée, la dynamique est décrite par un hamiltonien $H(x, p)$ selon les équations de Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\} \text{ et } \frac{dp}{dt} = \{p, H\}.$$

Pour l'Univers rempli d'un champ scalaire, le crochet de Poisson $\{f, g\}$ est tel que :

$$\{f, g\} = -\frac{8\pi G}{3} \left[\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial a} \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial \Phi} \frac{\partial g}{\partial p_\Phi} - \frac{\partial f}{\partial p_\Phi} \frac{\partial g}{\partial \Phi} \right].$$

Au niveau quantique, la dynamique est donnée par

$$i\hbar \frac{d\hat{x}}{dt} = [\hat{x}, H] \text{ et } i\hbar \frac{d\hat{p}}{dt} = [\hat{p}, H],$$

avec $\hat{x}$ et $\hat{p}$ les opérateurs de position et d'impulsion et $[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$ le commutateur entre deux opérateurs. Les équations de Friedmann pour un univers plat, sans constante cosmologique et rempli d'un champ scalaire libre sont

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi G}{3} (\dot{\phi})^2$$

et

$$\ddot{\phi} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\phi} = 0,$$

avec a le facteur d'échelle.

Corrigés

9.1

1. La voie des boucles est différente de celle des cordes car i) c'est une quantification non perturbative de la gravitation qui place l'indépendance de fond au cœur de sa construction, mais ii) ce n'est pas une approche unificatrice de toutes les particules et interactions.
2. (a) Le principe d'incertitude de Heisenberg dit que $\Delta p \times \Delta x > \hbar/2$. Pour une impulsion $p = mv$, on a donc une taille minimale $x > x_{\min} = \hbar/2mv$. Or v est nécessairement plus petit que c . On trouve donc $x_{\min} = \hbar/2mc$.
- (b) D'un point de vue gravitationnel, l'objet le plus compact pour une masse m est un trou noir. La taille minimale sera donc le rayon de Schwarzschild : $x > x_{\min} = 2Gm/c^2$.

- (c) D'une part, la mécanique quantique affirme que $m = \hbar/2x_{\min}c$. D'autre part, la relativité générale affirme que $m = x_{\min}c^2/2G$. En combinant ces deux égalités, on trouve donc $x_{\min} \sim \sqrt{G\hbar/c^3}$. La mécanique quantique et la relativité générale imposeraient donc une longueur minimale :

$$x > L_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}.$$

9.2

1. Le principe d'équivalence nous dit que la construction d'un système de coordonnées inertielles n'est possible *que localement* (excepté dans le cas d'un espace plat). Ainsi, à moins de considérer l'espace-temps de Minkowski, le système ξ^I ne peut pas être globalement inertiel.
2. Puisque $\xi^I(X)$ est localement inertiel en X , nous avons $g_{IJ}(X) = \eta_{IJ}$.
3. Par simple application de la loi de transformation des tenseurs, on trouve

$$g_{\mu\nu}(X) = g_{IJ} \left(\frac{\partial \xi^I(X)}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial \xi^J(X)}{\partial x^\nu} \right) = \eta_{IJ} \left(\frac{\partial \xi^I(X)}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial \xi^J(X)}{\partial x^\nu} \right).$$

En contractant l'équation ci-dessus avec $\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^I(X)} \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^J(X)} \right)$, on obtient

$$g_{IJ} = g_{\mu\nu}(X) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^I(X)} \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^J(X)} \right).$$

4. L'opérateur $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ se transforme comme un vecteur covariant. Ainsi

$$e_\mu^I(X) \rightarrow e_{\mu'}^I(X) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right) e_\mu^I(X).$$

Pour chacune des quatre valeurs de l'indice I , la quantité $V_\mu^I(x)$ s'interprète comme un champ de vecteurs covariants.

5. L'indice I réfère aux coordonnées ξ^I . Ces coordonnées sont localement inertielles et $g_{IJ} = \eta_{IJ}$. C'est donc le tenseur de Minkowski η_{IJ} qui permet de descendre et monter les indices I, J , etc. De même, l'indice μ réfère à un système de coordonnées curvilignes et le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est le tenseur permettant de monter ou descendre les indices μ, ν etc.
6. On part de $g_{\mu\lambda} = \eta_{IJ} e_\mu^I e_\lambda^J$ qu'on contracte avec $g^{\lambda\nu}$. Cela aboutit à $g^{\lambda\nu} g_{\mu\lambda} = \eta_{IJ} e_\mu^I g^{\lambda\nu} e_\lambda^J$. En utilisant $g^{\lambda\nu} g_{\mu\lambda} = \delta_\mu^\nu$ et $\eta_{IJ} g^{\lambda\nu} e_\lambda^J = e_I^\nu$ on trouve aisément $e_\mu^I e_I^\nu = \delta_\mu^\nu$. Ensuite, on part de $\eta_{JK} = g_{\mu\nu} e_J^\mu e_K^\nu$ qu'on contracte avec η^{IK} . En utilisant, $\eta^{IK} \eta_{JK} = \delta_J^K$ et $g_{\mu\nu} \eta^{IK} e_K^\nu = e_\mu^I$, on trouve $e_\mu^I e_J^\mu = \delta_J^I$.
7. On peut voir la quantité $A^I(X)$ comme la « projection » du vecteur contravariant sur la base des vecteurs e_μ^I . Il s'agit donc des composantes de A^μ dans la base localement inertielle en X .

8. Dans le système localement inertiel, les lois de la relativité restreinte s'appliquent (localement). Donc $\eta_{IJ}\Lambda_K^I\Lambda_L^J = \eta_{KL}$. On trouve le lien suivant $A^J = \Lambda_I^J A^I$.
9. On remplace A^J par $e_\lambda^J A^\lambda$ et A^I par $e_\mu^I A^\mu$. Ainsi, $e_\lambda^J A^\lambda = \Lambda_I^J e_\mu^I A^\mu$. En contractant cette équation avec e_J^ν , on trouve donc

$$A^\nu = [e_J^\nu \Lambda_I^J e_\mu^I] A^\mu$$

et

$$\Lambda_\mu^\nu = e_\mu^I \Lambda_I^J e_J^\nu.$$

9.3

1. À partir de la définition des crochets de Poisson, on trouve

$$\{a, p_a\} = -\frac{8\pi G}{3} \text{ et } \{\Phi, p_\Phi\} = 1.$$

2. Les équations de Hamilton sont, pour le couple (a, p_a) ,

$$\dot{a} = \frac{p_a}{2a},$$

$$\dot{p}_a = \frac{p_a^2}{4a^2} - 4\pi G \frac{p_\Phi^2}{a^4}$$

et, pour le couple (Φ, p_Φ)

$$\dot{\Phi} = \frac{p_\Phi}{a^3},$$

$$\dot{p}_\Phi = 0.$$

3. On trouve $p_a = 2a \times \dot{a}$ et $p_\Phi = a^3 \dot{\Phi}$.
4. En injectant les expressions de p_a et p_Φ dans H , la contrainte $H = 0$ donne

$$a \times \dot{a}^2 = \frac{4\pi G}{3} \times a^3 \times \dot{\Phi}^2.$$

En divisant par a^3 , on retrouve la première équation de Friedmann.

5. En injectant l'expression de p_Φ en fonction de Φ dans $\dot{\Phi} = 0$, on trouve $3a^2 \dot{a} \dot{\Phi} + a^3 \ddot{\Phi} = 0$. On divise alors par a^3 pour obtenir $\ddot{\Phi} + 3(\dot{a}/a) \dot{\Phi} = 0$, qui n'est autre que l'équation de Friedmann décrivant la dynamique du champ scalaire.
6. En appliquant $[\hat{\Phi}, \hat{p}_\Phi]$ à une fonction d'onde test Ψ , on trouve :

$$[\hat{\Phi}, \hat{p}_\Phi] \Psi(\Phi) = -i\hbar \left(\Phi \frac{\partial \Psi(\Phi)}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial \Phi} (\Phi \times \Psi(\Phi)) \right) = i\hbar \Psi(\Phi).$$

7. On définit $\hat{a} \equiv a$ et $\hat{p}_a \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial a}$.

8. En remplaçant a et p_a par leurs opérateurs associés, l'opérateur hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{3\hbar^2}{32\pi G a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{2a^3} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2}.$$

9. L'équation de Wheeler-DeWitt est donc :

$$a^2 \frac{\partial^2 \Psi(a, \Phi)}{\partial a^2} - \frac{16\pi G}{3} \frac{\partial^2 \Psi(a, \Phi)}{\partial \Phi^2} = 0.$$

On notera la présence d'une ambiguïté. L'hamiltonien implique p_a^2/a . À un niveau classique, a et p_a commutent. Ainsi

$$p_a^2 \times a^{-1} = a^{-1} \times p_a^2 = p_a \times a^{-1} \times p_a$$

et l'ordre n'importe pas. Pourtant, au niveau quantique, $\hat{a}$ et $\hat{p}_a$ ne commutent plus et l'ordre des opérateurs « position » et « impulsion » dans l'hamiltonien joue un rôle important. Dans l'équation ci-dessus, nous avons implicitement supposé l'ordre suivant $\hat{a}^{-1} \times \hat{p}_a^2$. En adoptant par exemple l'ordre $p_a \times a^{-1} \times p_a$, l'équation de Wheeler-DeWitt serait alors

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[a^{-1} \frac{\partial \Psi(a, \Phi)}{\partial a} \right] - \frac{16\pi G}{3a^3} \frac{\partial^2 \Psi(a, \Phi)}{\partial \Phi^2} = 0,$$

qui diffère de celle proposée précédemment par la présence du terme $a^{-2} \frac{\partial \Psi(a, \Phi)}{\partial a}$. Ce problème d'ordre des opérateurs prend sa source dans le fait qu'ils ne commutent pas. Il n'apparaît donc pas au niveau du deuxième terme de l'équation, qui, lui, implique deux opérateurs qui commutent, $\hat{a}$ et $\hat{p}_\Phi$.

BIBLIOGRAPHIE

- M. BOJOWALD, *Loop Quantum Cosmology*, Living Rev. Relativity, 2008.
- S.M. CARROLL, *Spacetime and Geometry*, San Francisco, Addison Wesley, 2004.
- M. DALARSSON, N. DALARSSON, *Tensors, Relativity and Cosmology*, Amsterdam, Elsevier, 2005.
- J. HLADIK, M. CHRYSOS, *Introduction à la relativité restreinte*, Paris, Dunod, 2001.
- I.R. KENYON, *General Relativity*, Oxford, Oxford University Press, 1990.
- C. ROVELLI, *Quantum Gravity*, Cambridge, Cambridge University Press, 2004.
- C. ROVELLI, *Qu'est-ce que le temps ? Qu'est-ce que l'espace ?*, Paris, Bernard Gilson éditeur, 2008 (livre de vulgarisation très accessible).
- C.W. MISNER, K.S. THORNE, J.-A. WHEELER, *Gravitation*, New-York, Freeman and company, 1973.
- T. MOHAUPT, *Introduction to String Theory*, Lect. Not. Phys., 631, 173, 2003.
- D. ORITI (ed.), *Approaches to quantum Gravity*, Cambridge, Cambridge University Press, 2009.
- C. SEMAY, B. SYLVESTRE-BRAC, *Relativité restreinte*, Paris, Dunod, 2005.
- E.F. TAYLOR, J.A. WHEELER, *Exploring Black Holes*, Addison Wesley Longman, 2000.
- S. WEINBERG, *Gravitation and Cosmology*, Toronto, Wiley, 1973.
- B. ZWIEBACH, *A first course in string theory*, Cambridge, Cambridge University Press, 2004.

INDEX

A

action d'Einstein-Hilbert 94
action de Nambu-Goto 180
action de Polyakov 180

B

Big Bang 108
Big Bounce 199
boucles 193

C

choix de jauge 88
coefficients de connexion 61
conditions aux limites 182
connexion d'Ashtekar 196
constante cosmologique 96
contraintes 195
contravariantes 55
coordonnées comobiles 111
cordes 178
cosmologie 107
courbure 37
covariance 92
covariantes 55

D

D-brane 183
densité critique 121
densité de Planck 200
dérivée covariante 60
déviation géodésique 78
diagrammes de Penrose-Carter 164
difféomorphisme 91

E

échelle de Planck 178
entropie 160
équation d'onde 88
équation géodésique 65

équation métrique 37
équations d'Einstein 84
équations de Friedmann-Lemaître 118
évaporation de Hawking 160

F

facteur d'échelle 111
feuilletage 195
flux 197

G

gaz idéal de particules 113
géodésiques 37
graphe 193
graviton 93

H

holonomie 197
horizon causal 162
horizon d'un trou noir 142

I

indépendance de fond signifie 192
inflation 126
intervalle 3
invariance de fond 91
invariance de Lorentz 19
invariant de Gauss-Bonnet 96

J

jacobien 94

L

l'invariance de jauge 84
Le crochet de Poisson 196
Les transformations générales
 en espace-temps courbe 53
limite des champs faibles 86
lois de conservation 82

M

métrique 4
 métrique de Friedmann-Lemaître-
 Robertson-Walker 111
 métrique de Schwarzschild 142
 mouvement d'une corde relativiste 179

N

non-linéarité 85

O

ondes gravitationnelles 86
 orbites libres 153
 orbites liées 153

P

paramètre de Hubble 120
 particule test 150
 paysage 184
 principe d'équivalence 1
 principe d'équivalence d'Einstein 36
 principe d'équivalence de Galilée 35
 principe d'équivalence de Newton 35
 principe de covariance généralisé 58
 programme de Dirac 196

R

réseaux de spin 193
 rougissement gravitationnel 145

S

scalaire de Ricci 84
 singularité de coordonnées 156

singularités 122
 symétries 20

T

tenseur 18
 tenseur « énergie-impulsion » 81
 tenseur d'Einstein 84
 tenseur de Ricci 84
 tenseur de Riemann 76
 tenseur électrodynamique 26
 tétrade 92
 théorème fondamental de la géométrie
 riemannienne 64
 théorie quantique des champs en espace
 courbe 161
 théories de jauge 21
 théories scalaire-tenseur 95
 transformation de Lorentz-Poincaré 17
 transport parallèle 41
 triade 195
 trous noirs 139
 trous noirs microscopiques 159

U

unification 177
 univers de Sitter 125
 univers homogène et isotrope 109

V

variétés différentielles 38

W

Wheeler et DeWitt 196

56316 – (II) – (0.8) – OSB 80° – EPR – API

Dépôt légal : août 2011 – Suite du tirage : mars 2013

Achevé d'imprimer par Dupli-Print

N° d'impression : 225660

www.dupli-print.fr

Imprimé en France

Aurélien Barrau ■ Julien Grain

Relativité générale

Cours et exercices corrigés

L'originalité de ce cours de **relativité générale** est de concilier une approche simple avec des thématiques complexes : **trous noirs**, **cosmologie** et les fascinants problèmes de **gravitation quantique** qui se situent au cœur de la recherche contemporaine. À chaque étape, les concepts et idées sont développés d'une manière très intuitive. Des **exercices**, tous corrigés, permettent à l'étudiant de s'exercer aux problématiques de la relativité générale.

Ce cours ne nécessite aucun pré-requis. Il s'adresse aux étudiants en Licence 3 ou Master, ainsi qu'aux élèves ingénieurs et chercheurs souhaitant revoir et approfondir leurs connaissances.

Aurélien Barrau

est professeur à l'université Grenoble-1, chercheur au laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, membre de l'Institut Universitaire de France.

Julien Grain

est chargé de recherche CNRS à l'Institut d'Astrophysique Spatiale d'Orsay.



9 782100 563166

6928949

ISBN 978-2-10-056316-6

